

**Schätzen und Testen in
semiparametrischen partiell linearen Modellen
für die Paneldatenanalyse**

Anja König *
Diskussionspapier 208
ISSN 0949-9962

November 1997

*Universität Hannover
Institut für Quantitative Wirtschaftsforschung
Königsworther Platz 1
30167 Hannover
Fax-Nr. 0049 511 762-3923
E-Mail: koenig@mbox.iqw.uni-hannover.de

1 Einleitung

Ökonometrische Modelle bilden typischerweise eine endogene Variable y als bekannte Funktion von erklärenden Größen x, z ab, häufig ergänzt um eine Verteilungsannahme über den Störterm der Regressionsbeziehung. Schätzfunktionen für die unbekannt Parameter des Modells werden dann gewöhnlich über lineare oder nichtlineare Kleinst-Quadrate-Verfahren gewonnen, im Fall einer Parametrisierung der stochastischen Modellkomponente üblicherweise auch über die Maximum-Likelihood-Methode. Die ökonomische Theorie läßt jedoch häufig den funktionalen Zusammenhang zwischen endogener Variable und Regressoren unspezifiziert, und falsche Parametrisierungen des systematischen Teils des ökonometrischen Modells führen in der Regel ebenso zu inkonsistenten Schätzfunktionen wie fehlerhafte Verteilungsannahmen über die stochastische Restgröße bei Verwendung des ML-Verfahrens. Diese Beobachtung führte in den letzten Jahren zu einer steigenden Popularität von nichtparametrischen und semiparametrischen Schätzverfahren, von denen die ersten keine Parametrisierungen in der Regressionbeziehung benötigen und letztere hier verstanden werden als Methoden zur Schätzung von ökonometrischen Modellen, von denen nur einzelne Bestandteile funktional spezifiziert sind. Ein solcher semiparametrischer Regressionsansatz ist der des partiell linearen Modells

$$y = x'\alpha + \theta(z) + u \quad (1)$$

mit unbekannter Funktion $\theta(\cdot)$. Dabei ist α ein unbekannter, zu schätzender Koeffizientenvektor und u die Restgröße des Modells. Eine Reihe von Arbeiten haben sich in den letzten Jahren mit dem Schätzen und Testen der Regressionsbeziehung (1) befaßt, vgl. z.B. für die Entwicklung von \sqrt{N} -konsistenten Schätzfunktionen $\hat{\alpha}$ - um nur einige wenige zu nennen - die Ansätze von Robinson (1988) und Speckman (1988), die das Problem der unbekannt Funktion $\theta(\cdot)$ über nichtparametrische Kernregressionsschätzungen lösen, oder die neueren Arbeiten von Liu/Lu (1997), die einen k-NN-Ansatz nutzen, Battacharya/Zhao (1997) und Yatchew (1997) für Differenzenverfahren oder Mammen/Van de Geer (1997) und Ai/McFadden (1997), die beide das Problem der Schätzung von α in einer Verallgemeinerung des

Ansatzes (1) auf partiell spezifizierte nichtlineare Modelle betrachten. Einen \sqrt{N} -konsistenten Instrumentalvariablenschätzer für α in einem Paneldatenkontext schlagen Li/Stengos (1996) vor. Ausgehend von diesem letzteren Schätzansatz stellt die vorliegende Arbeit eine Auswahl an Schätz- und Testverfahren für ein semiparametrisches Modell der Art (1) für Paneldaten vor, die zur umfassenden Regressionsanalyse geeignet ist. Dabei schließt sich der im wesentlichen auf den Arbeiten von Baltagi et al. (1996), Fan/Li (1996), Kniesner/Li (1996), Li/Hsiao (1996), Li/Stengos (1996) und Li/Wang (1996) basierenden Darstellung bekannter Verfahren für gleichgewichtige Datensätze die Anwendung auf den einfachen Fall eines Unbalanced Panels an. Kniesner/Li (1996) folgend, wird die partiell lineare Regressionbeziehung als Modell mit variablen Koeffizienten interpretiert, und ein Auswertungsmechanismus für diese Koeffizienten wird vorgeschlagen. Des weiteren werden einige Überlegungen zum Testen der Modellspezifikation angestellt, wenn Regressoren mit dem Störterm des Modells korreliert sind. Eine empirische Anwendung des vorgestellten umfassenden Schätz- und Testinstrumentariums findet sich in Hübler/König (1997).

2 Das Modell

Betrachtet sei wie in Li/Stengos (1996) das semiparametrische partiell lineare Paneldatenmodell

$$y_{it} = x'_{it}\alpha + \theta(z_{it}) + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

in dem α einen $q_1 \times 1$ -Vektor von unbekanntem Koeffizienten für die Variablen $x_{it} \in R^{q_1}$ und $\theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R$ eine unbekannte Funktion der Variablen $z_{it} \in R^{q_2}$ bezeichnet. i und t sind Laufindizes für die Individuen bzw. die Zeit, und die Anzahl der Zeitpunkte T sei fix. Die Variablen x_{it} seien in beliebiger Form mit der Restgröße u_{it} des Modells korreliert, während aufgrund der Unspezifiziertheit der Funktion $\theta(\cdot)$ auf jeden Fall $E(u_{it} | z_{it}) = 0$ erfüllt ist. Letzteres, da jede Korrelation zwischen dem Störterm u_{it} und den Variablen z_{it} immer Eingang in den nichtparametrischen Term $\theta(\cdot)$ finden würde.¹

Eine Taylorreihenentwicklung der unbekanntem Funktion $\theta(z_{it})$ um z ergibt (Kniesner/Li 1996)

$$\begin{aligned} \theta(z_{it}) &= \theta(z) + \frac{\partial\theta(z)}{\partial z'_{it}}(z_{it} - z) + \frac{1}{2}(z_{it} - z)' \frac{\partial^2\theta(\tilde{z})}{\partial z_{it}\partial z'_{it}}(z_{it} - z) \\ &\equiv \theta(z) + \frac{\partial\theta(z)}{\partial z'_{it}}(z_{it} - z) + R(z_{it}, z) \end{aligned} \quad (4)$$

für ein \tilde{z} zwischen z und z_{it} , und Einsetzen von (4) in Gleichung (2) liefert

$$\begin{aligned} y_{it} &= x'_{it}\alpha + \theta(z) + \frac{\partial\theta(z)}{\partial z'_{it}}(z_{it} - z) + R(z_{it}, z) + u_{it} \\ &\equiv \tilde{\theta}(z) + x'_{it}\alpha + \beta(z)'z_{it} + \check{u}_{it} \end{aligned} \quad (5)$$

mit $\tilde{\theta}(z) \equiv \theta(z) - \frac{\partial\theta(z)}{\partial z'_{it}}z$, $\beta(z) \equiv \frac{\partial\theta(z)}{\partial z_{it}}$ und $\check{u}_{it} \equiv u_{it} + R(z_{it}, z)$. Da offensichtlich $R(z_{it}, z) = O(\|z_{it} - z\|^2)$, ist der Ansatz (5) für ein z in einer Umgebung

¹Sei eine strukturelle Form für y_{it} gegeben durch

$$y_{it} = x'_{it}\alpha + \tilde{\theta}(z_{it}) + \nu_{it} \quad (3)$$

mit $E(\nu_{it} | z_{it}) = \tau(z_{it})$. Dann gilt, $E(y_{it} | z_{it}) = E(x_{it} | z_{it})'\alpha + \tilde{\theta}(z_{it}) + \tau(z_{it}) \equiv E(x_{it} | z_{it})'\alpha + \theta(z_{it})$, und somit sind die Regressionsbeziehungen (2) und (3) bzgl. ihres auf z_{it} bedingten Erwartungswerts nicht unterscheidbar.

von z_{it} annähernd als lineares Modell mit variablen Koeffizienten $\beta(z)$ interpretierbar.

Marginale Änderungen der erklärenden Variablen x_{it} und z_{it} induzieren Veränderungen der endogenen Variablen y_{it} in Höhe von

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{it}}{\partial x_{it}} &= \alpha, \\ \frac{\partial y_{it}}{\partial z_{it}} &= \frac{\partial \theta(z_{it})}{\partial z_{it}} \\ &= \beta(z) + \frac{\partial R(z_{it}, z)}{\partial z_{it}} \\ &\equiv \beta(z_{it}) \approx \beta(z), \end{aligned}$$

die mittels konsistenter Schätzfunktionen für den unbekanntem Koeffizientenvektor α und die NT Vektoren von variablen Koeffizienten $\beta(z_{it})$ quantifizierbar sind.

Der Regressionsansatz (2) läßt sich leicht in einem ungleichgewichtigen Paneldatensatz betrachten, in dem für einige Individuen zu einzelnen Zeitpunkten keine Beobachtungen vorhanden sind. Definiert sei eine Dummy-Variable c_{it} :

$$c_{it} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Individuum } i \text{ in Periode } t \text{ beobachtet wird} \\ 0 & \text{wenn Individuum } i \text{ in Periode } t \text{ nicht beobachtet wird.} \end{cases}$$

Dann gilt Beziehung (2) mit der Einschränkung, daß $(y_{it}, x'_{it}, z'_{it})$ nur dann beobachtbar ist, wenn $c_{it} = 1$ ist, und ferner ist jede Summation einer beliebigen Funktion $g(y_{it}, x'_{it}, z'_{it}, u_{it})$ über alle beobachtbaren Stichprobenvariablen darstellbar als

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} g(y_{it}, x'_{it}, z'_{it}, u_{it}).$$

Dabei ist N die Anzahl aller Individuen, für die Beobachtungen aus mindestens einer Periode vorliegen.

3 Schätzung

3.1 Schätzung des Koeffizientenvektors α

Li/Stengos (1996) betrachten die \sqrt{N} -konsistente Schätzung des unbekannt-ten Koeffizientenvektors α in einem Balanced-Datensatz: Zunächst ist (Robinson 1988)

$$E(y_{it} | z_{it}) = E(x_{it} | z_{it})' \alpha + \theta(z_{it}),$$

und damit folgt:

$$y_{it} - E(y_{it} | z_{it}) = (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' \alpha + u_{it}. \quad (6)$$

In üblicher Weise kann somit ein gewöhnlicher Kleinst-Quadrate-Schätzer, sofern x_{it} und u_{it} unkorreliert sind, oder allgemein ein Instrumentalvariablen (IV)-Schätzer für den Koeffizientenvektor α aus der Regressionsbeziehung (6) bestimmt werden, sofern die bedingten Erwartungswerte $E(A_{it} | z_{it})$, A_{it} aus der Menge $\{y_{it}, x_{it}\}$, für alle i und t bekannt sind. Letzteres wird in der Regel nicht der Fall sein, jedoch können diese Erwartungswerte nichtparametrisch konsistent geschätzt werden, z.B. über eine Nadaraya-Watson-Kernregressionsschätzung (Nadaraya 1964, Watson 1964):

$$\begin{aligned} \hat{E}(A_{it} | z_{it}) &= \frac{\frac{1}{NTa^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} A_{js}}{\frac{1}{NTa^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js}} \\ &= \frac{\hat{E}(A_{it} | z_{it}) \hat{f}_{it}}{\hat{f}_{it}} \\ &\equiv \frac{\hat{A}_{it} \hat{f}_{it}}{\hat{f}_{it}} = \hat{A}_{it}. \end{aligned}$$

Dabei ist $K_{it,js} \equiv K\left(\frac{z_{js} - z_{it}}{a}\right)$ ein üblicher Produktkern, also $K(\nu) = \prod_l k(\nu_l)$, wobei $k(\cdot)$ eine univariate Kernfunktion, ν_l die l -te Variable in ν und a einen Glättungsparameter bezeichnet. \hat{f}_{it} bezeichnet eine Schätzung für die Dichtefunktion $f(z_{it})$. Ein IV-Schätzer für α aus einem Regressionsansatz, in dem in Gleichung (6) die unbekannt-ten bedingten Erwartungswerte durch ihre Kernregressionsschätzungen ersetzt sind, wird jedoch vom Problem der „random denominators“ betroffen: Die Nenner der Kernregressionsschätzungen sind

Zufallsvariablen, was Schwierigkeiten in der Bestimmung der Schätzeigenschaften nach sich zieht; die Bedingung $f(z_{it}) > 0$ für alle i und t wird erforderlich. Zur Lösung dieser Problematik werden in der Literatur zwei Wege vorgeschlagen: Eine Methode sieht das Heraustrimmen von kleinen Werten von \hat{f}_{it} vor (z.B. Robinson 1988), die andere eine Dichtegewichtung (Powell et al. 1989) zur Beseitigung des zufälligen Nenners \hat{f}_{it} . Dem letzten Ansatz folgend, resultiert nach Li/Stengos (1996) eine Schätzung für α aus dem Regressionsansatz

$$y_{it}\hat{f}_{it} - \hat{y}_{it}\hat{f}_{it} = (x_{it}\hat{f}_{it} - \hat{x}_{it}\hat{f}_{it})'\alpha + \tilde{u}_{it}$$

mit $\tilde{u}_{it} = u_{it}\hat{f}_{it} - \hat{E}(u_{it} | z_{it})\hat{f}_{it}$:

$$\hat{\alpha} = \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it} - \hat{w}_{it})(x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2 \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it} - \hat{w}_{it})(y_{it} - \hat{y}_{it}) \hat{f}_{it}^2.$$

Dabei ist $\hat{w}_{it} \equiv \hat{E}(w_{it} | z_{it})$, und w_{it} bezeichnet einen Vektor von Instrumentalvariablen für x_{it} .

Sei sowohl die Klasse der Kernfunktionen K_ν als auch die Klasse der Funktionen G_μ^α , $\mu > 0$, $\alpha > 0$, definiert wie in Robinson (1988) (vgl. für diese Definitionen Anhang A).² Dann prüfen Li/Stengos (1996) die \sqrt{N} -Konsistenz und die Verteilung der Schätzfunktion $\hat{\alpha}$ unter folgenden Bedingungen:³

- (A1) (x_i, z_i, u_i) sind unabhängig identisch verteilt über alle i . Dabei bezeichnet A_i , A aus $\{x, z, u\}$, den Vektor $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iT})'$.
- (A2) Für alle $t = 1, \dots, T$ besitzt z_{1t} eine Dichtefunktion $f \in \mathcal{G}_\lambda^\infty$ für ein beliebiges $\lambda > 0$, und ferner gilt, $\theta(\cdot) \in \mathcal{G}_\nu^{4+\delta}$, $E(x_{1t} | z_{1t}) \in \mathcal{G}_\nu^{4+\delta}$ für ein beliebiges $\delta > 0$ und eine ganze Zahl $\nu \geq 1$ mit $\lambda < \nu \leq \lambda + 1$, $E(u_{1t}^{4+\delta}) < \infty$ für ein beliebiges $\delta > 0$.

²Alle $k \in \mathcal{K}_\nu$ sind Kernfunktionen ν -ter Ordnung, und vereinfacht gesprochen gilt, falls $g \in \mathcal{G}_\mu^\alpha$ mit einer natürlichen Zahl μ , ist g μ -mal partiell differenzierbar, und diese Ableitungen sind ebenso wie g durch eine Funktion mit endlichem α -ten Moment gebunden.

³Hierbei handelt es sich im wesentlichen um die Annahmen von Li/Stengos 1996, jedoch wurde (A3) korrigiert: Li/Stengos (1996) setzen lediglich $E(u_{it} | w_{it}) = 0$ voraus, aus dem Beweis von Theorem 1 der Autoren ist aber ersichtlich, daß Theorem 1 nur unter der stärkeren Bedingung $E(u_{it} | w_{it}, z_{it}) = 0$ Gültigkeit besitzt, was im allgemeinen nicht aus $E(u_{it} | w_{it}) = 0$ und $E(u_{it} | z_{it}) = 0$ folgt.

(A3) Es existiert ein $w_{1t} \in R^{q_1}$ mit $E(u_{1t} | w_{1t}, z_{1t}) = 0$, $E(w_{1t}^{4+\delta}) < \infty$ und $E(w_{1t} | z_{1t}) \in \mathcal{G}_\nu^{4+\delta}$ für ein beliebiges $\delta > 0$ und alle $t = 1, \dots, T$. $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{iT})'$ ist unabhängig identisch verteilt über alle i , und ferner ist $\sum_{t=1}^T E \{ (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t}))(x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f^2(z_{1t}) \}$ nicht singulär.

(A4) $k \in \mathcal{K}_\nu$, und für $N \rightarrow \infty$ gilt, $a \rightarrow 0$, $Na^{2q_2} \rightarrow \infty$ und $Na^{4\nu} \rightarrow 0$.

Nach Theorem 1 in Li/Stengos (1996) ist unter (A1) bis (A4)

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, V),$$

und ein konsistenter Schätzer für V ist $\hat{V} = \hat{B}^{-1} \hat{A} (\hat{B}^{-1})'$ mit

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it} - \hat{w}_{it})(x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2, \\ \hat{A} &= \frac{1}{NT^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it} - \hat{w}_{it}) \hat{f}_{it} (w_{is} - \hat{w}_{is})' \hat{f}_{is} \hat{u}_{it} \hat{u}_{is}'. \end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{u}_{it} = (y_{it} - \hat{y}_{it}) \hat{f}_{it} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} \hat{\alpha}$.

Hinsichtlich der Voraussetzungen (A1) bis (A4) sei angemerkt, daß (A1) eine Standardbedingung bzgl. der Unabhängigkeit der Beobachtungseinheiten ist, und neben einer Annahme über den bedingten Erwartungswert der Störgröße und einer gewöhnlichen Voraussetzung bzgl. der Invertierbarkeit einer Summe in (A3) handelt es sich bei (A2) und (A3) um in der Nichtparametrik übliche, wenig restriktive Bedingungen über Momente und die Glattheit einiger Funktionen. (A4) stellt Anforderungen an die Kernfunktion und setzt erfüllbare Bedingungen für die Bandweite. Eine Kernfunktion zweiter Ordnung kann danach für $q_2 \leq 3$ genutzt werden. Nach Li (1996) und Li/Ullah (1996) kann (A4) durch folgende Annahme ersetzt werden:

(A4') $k \in \mathcal{K}_\nu$, und für $N \rightarrow \infty$ gilt, $a \rightarrow 0$, $Na^{\max(2q_2-4, q_2)} \rightarrow \infty$ und $Na^{4\nu} \rightarrow 0$.

Unter dieser schwächeren Voraussetzung ist für $q_2 \leq 5$ eine Kernfunktion zweiter Ordnung nutzbar. Die Bedingung $E(u_{1t} | w_{1t}, z_{1t}) = 0$ in (A3) ist schärfer als im linearen Modell, das neben $E(u_{1t} | z_{1t}) = 0$ nur die Gültigkeit

von $E(u_{1t} | w_{1t}) = 0$ erfordert. Die Voraussetzung $E(u_{1t} | w_{1t}, z_{1t}) = 0$ ist aber z.B. immer dann erfüllt, wenn die Variablen u_{1t} und w_{1t} unabhängig sind, gegeben z_{1t} , oder gleiches gilt für u_{1t} und z_{1t} , gegeben w_{1t} . Im übrigen gilt für jede schwach exogene Variable z_{1t}^l aus z_{1t} , $E(u_{1t} | z_{1t}^l, z_{1,t-1}^l) = 0$, so daß ggf. $z_{1,t-1}^l$ oder eine Funktion davon als Instrumentalvariable genutzt werden kann (vgl. Li/Stengos 1994 für den Fall eines dynamischen Paneldatenmodells). Zu beachten ist, daß die Annahmen (A1) bis (A3) dem Fehlerterm u_{1t} keine Restriktionen hinsichtlich des stochastischen Zeitreihenprozesses auferlegen; u_{1t} kann eine serielle Korrelation oder eine bedingte Heteroskedastie beliebiger Art aufweisen. Damit kann es sich bei der Regressionsbeziehung (2) z.B. um ein Random-Effects-Modell mit additiven Fehlerkomponenten $u_{1t} = \mu_1 + \epsilon_{1t}$ handeln.⁴ Die Koeffizienten eines OLS-schätzbaren linearen Random-Effects-Modells können mit der Gewichtungsmatrix $\hat{E}(uu' | x, z)$, $u = (u'_1, u'_2 \dots u'_N)'$, effizienter über ein GLS-Verfahren geschätzt werden. Entsprechendes zeigen Li/Ullah (1996) für die EGLS-Schätzung von α in einem homoskedastischen semiparametrischen partiell linearen Modell, das $E(uu' | x, z) = \sigma_\mu^2 I_N \otimes e_T e_T' + \sigma_\epsilon^2 I_{NT}$ erfüllt. Dabei bezeichnet e_T einen $T \times 1$ -Vektor mit Einsen und I_k die Einheitsmatrix der Dimension k . Auf die Darstellung der EGLS-Schätzfunktion sei hier verzichtet.

Der für ein Balanced Panel konzipierte Schätzansatz von Li/Stengos (1996) läßt sich leicht auf den Fall eines ungleichgewichtigen Paneldatensatzes anwenden. Ein Schätzer für α ist hier gegeben durch

$$\hat{\alpha}_{UB} = \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} (w_{it} - \hat{w}_{it}) (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2 \right\}^{-1} \\ \times \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} (w_{it} - \hat{w}_{it}) (y_{it} - \hat{y}_{it}) \hat{f}_{it}^2$$

mit $\hat{f}_{it} = \frac{1}{a^{q2} \sum_{t=1}^T N_t} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N c_{js} K_{it,js}$ und $\hat{A}_{it} = \frac{1}{a^{q2} \sum_{t=1}^T N_t} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N c_{js} K_{it,js} A_{js} / \hat{f}_{it}$. Dabei ist $N_t = \sum_{i=1}^N c_{it}$ für alle t .

⁴In einem Modell mit fixen Individualeffekten können diese unbeobachtbaren Effekte in gewöhnlicher Weise durch Differenzenbildung eliminiert und ein Schätzer $\hat{\alpha}$ aus dem transformierten Modell $y_{it} - y_{i,t-1} = (x_{it} - x_{i,t-1})' \alpha + \Delta \theta(z_{it}, z_{i,t-1}) + u_{it} - u_{i,t-1}$ mit unbekannter Funktion $\Delta \theta(z_{it}, z_{i,t-1}) \equiv \theta(z_{it}) - \theta(z_{i,t-1})$ gewonnen werden.

Sei folgende weitere Annahme spezifiziert:

(A5) $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{iT})'$ ist unabhängig identisch verteilt über alle i , und c_i ist unabhängig von (x_i, z_i, u_i) . Ferner gilt mit $P_{1t} \equiv P(c_{1t} = 1)$, $\sum_{t=1}^T P_{1t} E \{ (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t}))(x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f^2(z_{1t}) \}$ ist nicht singular.

Dann folgt:

Satz 1: *Unter den Annahmen (A1) bis (A5) gilt:*

$$(1) \quad \sqrt{N}(\hat{\alpha}_{UB} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, V_{UB})$$

mit $V_{UB} = B_{UB}^{-1} A_{UB} (B_{UB}^{-1})'$ und

$$B_{UB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} E \{ (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t}))(x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f^2(z_{1t}) \},$$

$$A_{UB} = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T P_{1ts} E \{ (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t}))(w_{1s} - E(w_{1s} | z_{1s}))' \times f^2(z_{1t}) f^2(z_{1s}) u_{1t} u_{1s} \}.$$

Dabei ist $P_{1,ts} \equiv P(c_{1t} = 1 \cap c_{1s} = 1)$.

(2) Ein konsistenter Schätzer für V_{UB} ist $\hat{V}_{UB} = \hat{B}_{UB}^{-1} \hat{A}_{UB} (\hat{B}_{UB}^{-1})'$ mit

$$\hat{B}_{UB} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} (w_{it} - \hat{w}_{it})(x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2,$$

$$\hat{A}_{UB} = \frac{1}{NT^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} c_{is} (w_{it} - \hat{w}_{it})(w_{is} - \hat{w}_{is})' \hat{f}_{it} \hat{f}_{is} \hat{u}_{it} \hat{u}_{is}$$

und $\hat{u}_{it} = (y_{it} - \hat{y}_{it}) \hat{f}_{it} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} \hat{\alpha}_{UB}$.

Der Beweis von Satz 1 befindet sich im Anhang B.

3.2 Schätzung der nichtparametrischen Terme $\theta(z_{it})$ und der variablen Koeffizienten $\beta(z_{it})$

Schätzfunktionen für die unbekannt Funktionen $\theta(z_{it})$ und die variablen Koeffizienten $\beta(z_{it})$ lassen sich aus den Differenzen $y_{it} - x_{it}' \hat{\alpha}_{(UB)}$ mittels nicht-

parametrischer Schätzmethoden für bedingte Erwartungswerte und ihre Ableitungen ermitteln, und ein populäres Verfahren ist auch hier die Nadaraya-Watson-Schätzung. Da $\hat{\alpha}_{(UB)}$ hinreichend schnell gegen α konvergiert, bleiben Konsistenz- und Verteilungseigenschaften der Schätzfunktionen erhalten, die sich bei Kenntnis von α ergeben würden. Der Nadaraya-Watson-Schätzer ist jedoch in einiger Hinsicht einem anderen nichtparametrischen Schätzverfahren unterlegen, dem der Lokalen Linearen Kleinst-Quadrate-Regression (vgl. erstmals Stone 1977 und Cleveland 1979 für das allgemeinere Verfahren der Lokalen Gewichteten Kleinst-Quadrate-Regression). So zeigen Fan (1992, 1993) und Fan/Gijbels (1992) für den Fall eines Regressors in $\theta(\cdot)$, daß der Lokale Kleinst-Quadrate-Schätzer asymptotisch einige Effizienzeigenschaften aufweist und anders als der Nadaraya-Watson-Schätzer unverzerrt ist, wenn das wahre Modell linear ist; er besitzt ferner im Verhältnis zur Kernschätzung superiore Eigenschaften im Grenzbereich (z.B. auch Hastie/Loader 1993).

Kniesner/Li (1996) nutzen die Idee der Lokalen Linearen Kleinst-Quadrate-Regression zur Schätzung von $\theta(z_{it})$ und $\beta(z_{it})$ in einem Balanced Panel mit seriell unkorrelierten Störtermen, und diesem Ansatz folgend, gilt zunächst ausgehend von der Taylorreihenentwicklung (4):

$$\begin{aligned}\theta(z_{js}) &= \theta(z_{it}) + \beta(z_{it})'(z_{js} - z_{it}) + R(z_{js}, z_{it}) \\ &= (1, (z_{js} - z_{it})') \begin{pmatrix} \theta(z_{it}) \\ \beta(z_{it}) \end{pmatrix} + R(z_{js}, z_{it}).\end{aligned}\quad (7)$$

Dabei bezeichnet wieder $j = 1, \dots, N$ einen Laufindex für die Individuen und $s = 1, \dots, T$ einen Laufindex für die Zeit. Einsetzen von Gleichung (7) in Beziehung (2), formuliert für Individuum j in Periode s , ergibt

$$y_{js} = x'_{js}\alpha + (1, (z_{js} - z_{it})') \begin{pmatrix} \theta(z_{it}) \\ \beta(z_{it}) \end{pmatrix} + R(z_{js}, z_{it}) + u_{js},$$

und mit $\delta(z_{it}) \equiv \begin{pmatrix} \theta(z_{it}) \\ \beta(z_{it}) \end{pmatrix}$ sowie Differenzenbildung $y_{js} - x'_{js}\hat{\alpha}$ folgt:

$$y_{js} - x'_{js}\hat{\alpha} = (1, (z_{js} - z_{it})') \delta(z_{it}) + x'_{js}(\alpha - \hat{\alpha}) + R(z_{js}, z_{it}) + u_{js}. \quad (8)$$

Da $R(z_{js}, z_{it}) = O(\|z_{js} - z_{it}\|^2)$ und $(\hat{\alpha} - \alpha) = O_p(N^{-1/2})$, ist Gleichung (8) für ein z_{it} in einer Umgebung von z_{js} approximativ linear. Ein Schätzer

für $\delta(z_{it})$ resultiert dann aus der Lokalen Kleinst-Quadrate-Regression von $y_{js} - x'_{js}\hat{\alpha}$ auf $(1, (z_{js} - z_{it})')$:

$$\hat{\delta}(z_{it}) = \left\{ \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} \begin{pmatrix} 1 \\ z_{js} - z_{it} \end{pmatrix} (1, (z_{js} - z_{it})') \right\}^{-1} \times \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} (1, (z_{js} - z_{it})')' (y_{js} - x'_{js}\hat{\alpha}). \quad (9)$$

Dabei ist $\bar{K}_{it,js} \equiv \bar{K}\left(\frac{z_{js}-z_{it}}{h}\right)$ ein Produktkern, $\bar{K}(\nu) = \prod_l \bar{k}(\nu_l)$, und $\bar{k}(\nu_l)$ bezeichnet eine univariate Kernfunktion für die l -te Variable in ν und h einen Glättungsparameter. $\bar{K}_{it,js}$ verleiht in der Lokalen Kleinst-Quadrate-Regression Beobachtungen von z_{js} in der Nähe von z_{it} ein großes Gewicht und solchen, die weit entfernt von z_{it} liegen, nur einen geringen Einfluß.

Seien zwei weitere Bedingungen formuliert:

(A6) $\bar{k} \in \mathcal{K}_2$ und $\bar{k}(\nu_l) \geq 0$ für alle $\nu_l \in R$. Für $N \rightarrow \infty$ gilt, $h \rightarrow 0$ und $Nh^{q_2+2} \rightarrow \infty$.

(A7) $\lim_{N \rightarrow \infty} Nh^{q_2+4} \rightarrow 0$.

Dann folgt die Konsistenz von $\hat{\delta}(z_{it})$ bzgl. $\delta(z_{it})$ unter den Annahmen (A1) bis (A4) bzw. (A4') und (A6), sofern $f(z_{it}) > 0$, und

$$D(N)(\hat{\delta}(z_{it}) - \delta(z_{it})) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma),$$

mit $D(N) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{Nh^{q_2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Nh^{q_2+2}} I_{q_2} \end{pmatrix}$, besitzt Gültigkeit, sofern zusätzlich (A7) erfüllt ist (Propositionen 1 und 2 in Kniesner/Li 1996 in Verbindung mit den Aussagen in Li 1996 und Li/Ullah 1996).⁵ Ein konsistenter Schätzer

⁵Kniesner/Li 1996 prüfen sowohl die Konsistenz der Schätzfunktion als auch die Verteilungseigenschaft wie oben erwähnt unter zusätzlichen Voraussetzungen, und zwar erstens der Annahme, daß die Störterme der Regressionsbeziehung (2) einem Martingaldifferenz-Prozeß folgen und zweitens der Bedingung $E(u_{it} | x_{it}, z_{it}) = 0$. Es ist aus den Beweisen der Propositionen 1 und 2 in Kniesner/Li (1996) leicht zu sehen, daß die letztere Voraussetzung wie in (A3) ersetzt werden kann durch $E(u_{it} | w_{it}, z_{it}) = 0$, und die erste erwähnte Bedingung besitzt hinsichtlich der Aussagen der Propositionen 1 und 2 keine Bedeutung, wie im folgenden explizit noch aus dem Beweis der Sätze 2 und 3 in dieser Arbeit zu sehen ist.

für Σ ist $\hat{\Sigma} = \hat{R}^{-1}\hat{\Omega}\hat{R}^{-1}$ mit

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{it} & 0 \\ 0 & \hat{f}_{it}e_k I_{q_2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{NT^2 h^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js}^2 \hat{u}_{js}^2 & 0 \\ 0 & \left(d_k \frac{1}{NT^2 h^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} \hat{u}_{js}^2 \right) I_{q_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $e_k = \int \bar{k}(\nu) \nu_l^2 d\nu_l$, $d_k = \int \bar{k}^2(\nu) \nu_l^2 d\nu_l$ und $\hat{u}_{js} = y_{js} - \hat{y}_{js} - (x_{js} - \hat{x}_{js})' \hat{\alpha}$.

Der Ansatz läßt sich wieder leicht in einem ungleichgewichtigen Paneldatensatz betrachten. Eine Schätzfunktion für $\delta(z_{it})$ ist hier gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(z_{it})_{UB} &= \left\{ \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N c_{js} \bar{K}_{it,js} \begin{pmatrix} 1 \\ (z_{js} - z_{it}) \end{pmatrix} (1, (z_{js} - z_{it})') \right\}^{-1} \\ &\quad \times \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N c_{js} \bar{K}_{it,js} (1, (z_{js} - z_{it})')' (y_{js} - x'_{js} \hat{\alpha}_{UB}), \end{aligned} \quad (10)$$

und für $\hat{\delta}(z_{it})_{UB}$ folgt:

Satz 2 *Sofern $f(z_{it}) > 0$, gilt unter den Annahmen (A1) bis (A6):*

$$\hat{\delta}(z_{it})_{UB} \xrightarrow{p} \delta(z_{it}).$$

Satz 3 *Sofern $f(z_{it}) > 0$, gilt unter den Annahmen (A1) bis (A7):*

$$(1) \quad D(N) \left(\hat{\delta}(z_{it})_{UB} - \delta(z_{it}) \right) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{UB}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_{UB} &= R_{UB}^{-1} \Omega_{UB} R_{UB}^{-1}, \\ R_{UB} &= \begin{pmatrix} f(z_{it}) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} & 0 \\ 0 & f(z_{it}) e_k I_{q_2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{UB} &= \begin{pmatrix} \sigma^2(z_{it}) f(z_{it}) \int K^2(\nu) d\nu \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T P_{1t} & 0 \\ 0 & \sigma^2(z_{it}) f(z_{it}) d_k I_{q_2} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T P_{1t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) Ein konsistenter Schätzer für Σ_{UB} ist $\hat{\Sigma}_{UB} = \hat{R}_{UB}^{-1} \hat{\Omega}_{UB} \hat{R}_{UB}^{-1}$ mit

$$\hat{R}_{UB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{NT h^2} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} c_{js} & 0 \\ 0 & \frac{1}{NT h^2} e_k I_{q_2} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} c_{js} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{NT^2 h^2} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js}^2 \hat{u}_{js}^2 c_{js} & 0 \\ 0 & \frac{1}{NT^2 h^2} d_k I_{q_2} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \bar{K}_{it,js} \hat{u}_{js}^2 c_{js} \end{pmatrix},$$

$$\hat{u}_{js} = y_{js} - \hat{y}_{js} - (x_{js} - \hat{x}_{js})' \hat{\alpha}_{UB}.$$

Der Beweis der Sätze 2 und 3 findet sich im Anhang B.

3.3 Auswertung der Schätzergebnisse

Die Schätzung der variablen Koeffizienten $\beta(z_{it})$ und nichtparametrischen Terme $\theta(z_{it})$ liefert $\sum_{t=1}^T N_t$ Funktionen $\hat{\delta}(z_{it})$. Eine Informationsverdichtung ist hier in verschiedener Weise sinnvoll:

Zunächst gilt für die durchschnittliche Änderung der endogenen Variablen y_{it} bei einer marginalen Änderung der Regressoren z_{it} (Average Derivative),

$$E \left(\frac{\partial y_{it}}{\partial z_{it}} \right) = E(\beta(z_{it})) \quad (11)$$

mit unbekannter Funktion $\beta(\cdot)$, und die durchschnittliche Ausprägung der unbekanntem Funktion $\theta(\cdot)$ ist $E(\theta(z_{it}))$. Eine Reihe von semiparametrischen Schätzmethoden für Beziehung (11) sind unter dem Begriff der ADE (Average Derivative Estimation)-Verfahren vorgeschlagen worden, so z.B. Härdle/Stoker (1989), Powell et al. (1989), Rilstone (1991), Stoker (1991), Horowitz/Härdle (1996) oder Li (1996). Ein konsistenter Schätzer für (11) sowie für $E(\theta(z_{it}))$ resultiert nach Li et al. (1995) aus dem arithmetischen Mittel der mittels einer Lokalen Linearen Kleinst-Quadrate-Schätzung bestimmten Schätzfunktionen $\begin{pmatrix} \hat{\theta}(z_{it}) \\ \hat{\beta}(z_{it}) \end{pmatrix}$, und bezogen auf das Paneldatenmodell (2) ist somit

$$\hat{E}(\delta(z_{it})) = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{\delta}(z_{it})_{(UB)} c_{it},$$

mit $\hat{\delta}(z_{it})_{(UB)}$ wie in (9) bzw. (10) definiert, ein konsistenter Schätzer für $E\left(\frac{\theta(z_{it})}{\beta(z_{it})}\right)$ (vgl. auch Kniesner/Li 1996). Die Schätzung von (11) ist z.B. dann interessant, wenn $\theta(z_{it})$ einer Single-Index-Beziehung $\theta(z_{it}) = g(z'_{it}\beta)$ mit unbekannter Funktion $g(\cdot)$ genügt. Dann ist $\frac{\partial\theta(z_{it})}{\partial z_{it}} = \frac{\partial g(z'_{it}\beta)}{\partial z'_{it}\beta}\beta$, und $\hat{E}\left(\frac{\partial\theta(z_{it})}{\partial z_{it}}\right) = E\left(\frac{\partial g(z'_{it}\beta)}{\partial z'_{it}\beta}\beta\right)$ schätzt β bis auf eine skalare Konstante konsistent.

Die Ermittlung durchschnittlicher Ausprägungen $E(\delta(z_{it}))$ vernachlässigt den spezifischen Verlauf der Funktionen $\delta(z_{it})$, Informationen über Nichtlinearitäten von $\delta(z_{it})$ in einzelnen Variablen z_{it}^l aus z_{it} gehen verloren; so kann die Änderung der endogenen Variablen bei einer marginalen Veränderung von z_{it}^l aus z_{it} , $\frac{\partial\theta(z_{it})}{\partial z_{it}^l} = \beta_l(z_{it})$, $\beta(z_{it}) = (\beta_1(z_{it}), \dots, \beta_{l'}(z_{it}), \dots, \beta_{q_2}(z_{it}))'$, im mittleren Definitionsbereich des Regressors z_{it}^l eine völlig andere sein als an den Rändern. Insofern ist eine Schätzung des bedingten Erwartungswerts $E(\delta(z_{it}) | z_{it}^l)$ sinnvoll, und eine solche Schätzung kann aus einer nichtparametrischen Regression von $\hat{\delta}(z_{it})$ auf z_{it}^l gewonnen werden, z.B. als einfache Kernregressionsschätzung oder Lokale Kleinst-Quadrate-Regression oder auch ausreißerrobust über ein LOWESS-Verfahren (Cleveland 1979, Härdle 1990). Die Verläufe von $\theta(z_{it})$ und $\beta_l(z_{it})$ in z_{it}^l sind dann zweidimensional graphisch darstellbar. Anzumerken ist, daß wegen

$$y_{it} = x'_{it}\alpha + \sum_{l=1}^{q_2} \beta_l(z_{it})z_{it}^l + \check{u}_{it}$$

und $\beta_l(\cdot) = \beta_l(z_{it}) \neq \tilde{\beta}_l(z_{it}^l)$ i.a., wobei $\tilde{\beta}_l(z_{it}^l)$ definiert ist in der folgenden Gleichung (12), das vorgeschlagene Verfahren der Betrachtung von Nichtlinearitäten wesentlich allgemeiner ist als das der bekannten verallgemeinerten additiven Modellierung nach Hastie/Tibshirani (1990), nach der eine nicht-lineare Regression von y_{it} auf x_{it} und z_{it} beispielsweise formulierbar ist als

$$y_{it} = x'_{it}\alpha + \sum_{l=1}^{q_2} \tilde{\beta}_l(z_{it}^l)z_{it}^l + \check{u}_{it} \quad (12)$$

und das der Funktion $\theta(z_{it})$ die starke Restriktion $\theta(z_{it}) = \sum_{l=1}^{q_2} g_l(z_{it}^l)$ mit unbekanntem Funktionen $g_l(\cdot)$ auferlegt.

4 Tests

Die Konsistenz der Schätzergebnisse für eine zeitinvariante Modellspezifikation der Art (2) setzt die Poolbarkeit des Datenmaterials über die Zeit, also einen zeitunabhängigen Erwartungswert der endogenen Variablen, ebenso voraus wie eine korrekte Modellspezifikation. Damit ist ein Test auf die Poolbarkeit des Modells genauso sinnvoll wie ein Test auf die funktionale Form der Regressionsbeziehung. Ferner ist es naheliegend, eine vermutete parametrische Regressionsbeziehung gegen den semiparametrischen Ansatz (2) zu testen. Im folgenden ist jeweils ein Test für diese drei Bereiche beschrieben, wobei die Tests des semiparametrischen Modells gegen eine nichtparametrische Alternative und einer parametrischen Form gegen das semiparametrische partiell lineare Modell für Querschnittsdaten konzipiert sind, womit die Verteilungseigenschaften der Teststatistiken in der beschriebenen Form ohne weiteren Beweis zunächst nur dann Gültigkeit besitzen, wenn die Störterme des Paneldatenmodells unter der jeweiligen Nullhypothese seriell unkorreliert sind. Den Ausführungen schließt sich daher die Beschreibung zweier Tests auf eine serielle Korrelation in den Störtermen an.

4.1 Test auf Poolbarkeit

Die Güte eines Tests auf Poolbarkeit ist von der Richtigkeit der unterstellten Regressionsbeziehung abhängig; so kann z.B. ein erheblicher Size-Bias dann entstehen, d.h. die Nullhypothese der Zeitinvarianz mit einer das nominelle Signifikanzniveau stark überschreitenden Wahrscheinlichkeit verworfen werden, wenn zwar tatsächlich ein zeitunabhängiges Modell vorliegt, ein Test aber auf Basis eines fehlspezifizierten Modells vorgenommen wird (z.B. Hidalgo 1995). Motiviert werden somit Verfahren, die die strukturelle Stabilität ohne Spezifikation der funktionalen Form des Modells untersuchen, also ausgehend von der Regressionsbeziehung

$$y_{it} = E(y_{it} | v_{it}) + \varepsilon_{it} \equiv g_t(v_{it}) + \varepsilon_{it}, \quad v_{it} = (x'_{it}, z'_{it})' \sim q \times 1, \quad (13)$$

ohne Parametrisierung von $g_t(v)$ die Poolbarkeit der Daten über die Zeit testen, d.h. die Hypothese

$$\begin{aligned} H_0^{POOL} : & \quad g_t(v) = g(v) \quad \forall t \\ \text{gegen} \quad H_1^{POOL} : & \quad g_t(v) \neq g(v) \quad \text{für einige } t \text{ mit positiver} \\ & \quad \text{Wahrscheinlichkeit.} \end{aligned}$$

Dabei ist $g(v) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_t(v)$ eine Funktion, die ebenso unbekannt ist wie alle $g_t(v)$, $t = 1, \dots, T$.

Baltagi et al. (1996) entwickeln einen Test der Nullhypothese H_0^{POOL} gegen H_1^{POOL} als verallgemeinerten Conditional Moment Test (Newey 1985, Tauchen 1985) mit nichtparametrischer Gewichtungsfunktion: Zunächst sei $u_{it} = y_{it} - g(v_{it})$. Dann gilt aufgrund der Äquivalenz der Regressionsbeziehung

$$y_{it} = g(v_{it}) + u_{it}$$

zum Ansatz (13) unter der Nullhypothese und der Orthogonalität des Störterms aus Regressionsansatz (13) zu v_{it} ⁶ unter H_0^{POOL} :

$$E(u_{it} | v_{it}) = 0.$$

Damit besitzt auch eine verallgemeinerte Momentenbedingung mit nichtparametrischer Gewichtungsfunktion $E(u_{it} | v_{it})$ Gültigkeit:

$$E(u_{it} E(u_{it} | v_{it})) = E(E(u_{it} | v_{it})^2) = 0. \quad (14)$$

Unter der Gegenhypothese H_1^{POOL} ist

$$E(u_{it} E(u_{it} | v_{it})) > 0$$

erfüllt. Somit kann ein Test auf Poolbarkeit auf Basis einer Schätzung von $E(u_{it} E(u_{it} | v_{it}))$ durchgeführt werden. Da der unbedingte Erwartungswert $E(\cdot)$ zwar durch das arithmetische Stichprobenmittel, der bedingte Erwartungswert $E(u_{it} | v_{it})$ aber ebenso wie der Störterm u_{it} nur nichtparametrisch geschätzt werden kann, wobei wieder eine Kernregressionschätzung

⁶In einem nichtparametrischen Modell ist $E(u_{it} | v_{it}) = 0$ immer erfüllt, da definitionsgemäß $E(y_{it} | v_{it}) = g_t(v_{it})$, vgl. Beziehung (13).

zur Anwendung kommt, ist auch hier die Dichtegewichtung im Sinne von Powell et al. (1989) sinnvoll, da unter H_0^{POOL} aus $E(u_{it} | v_{it}) = 0$ auch folgt, $E(u_{it}f(v_{it}) | v_{it}) = 0$. Ein Schätzer für den dichtegewichteten Erwartungswert $E(u_{it}f(v_{it}) | v_{it})$ lautet:

$$\begin{aligned} J_{POOL} &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} \left\{ \hat{E}(\hat{u}_{it} \hat{f}_{it} | v_{it}) \hat{f}_{it} \right\} \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} \left\{ \frac{1}{(N-1)h^p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{u}_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt} \right\} \end{aligned}$$

mit $\hat{u}_{it} = y_{it} - \hat{y}_{it}$, $\hat{y}_{it} = \frac{1}{NTa^p} \frac{\sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} y_{js}}{\hat{f}_{it}}$ und $\hat{f}_{it} = \frac{1}{NTa^p} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js}$.

Dabei ist $K_{it,js} \equiv K\left(\frac{v_{js}-v_{it}}{a}\right)$ ein Produkt univariater Kernfunktionen, $K(\nu) = \prod_{l=1}^p k^c(\nu_l) \prod_{l=p+1}^q k^d(\nu_l)$, wobei k^c eine Kernfunktion für die p stetigen und k^d eine Kernfunktion für die $(q-p)$ diskreten Variablen in v_{it} bezeichnet, und ν_l ist die l -te Variable in v_{it} . Ferner bezeichnet $\bar{K}_{it,jt} \equiv \bar{K}\left(\frac{v_{jt}-v_{it}}{h}\right)$ ebenfalls einen Produktkern $\bar{K}(\nu) = \prod_{l=1}^p \bar{k}^c(\nu_l) \prod_{l=p+1}^q \bar{k}^d(\nu_l)$, in dem \bar{k}^c und \bar{k}^d die univariaten Kernfunktionen für die stetigen bzw. die diskreten Variablen in v_{it} sind. Seien zwei weitere Annahmen wie folgt spezifiziert:⁷

(A8) $g(v_{it}) \in \mathcal{G}_\nu^4$ für die stetigen Variablen in v_{it} , und für die gemeinsame Dichtefunktion $f(v_{11}, \dots, v_{1s})$ gilt, $f(v_{11}, \dots, v_{1s}) \in \mathcal{G}_{\nu-1}^\infty$ für eine ganze Zahl $\nu \geq 2$ und alle $s \in [1, T]$. Ferner sei für alle $t = 1, \dots, T$ $E(u_{1t}^4) < \infty$ und $\sigma^2(v_{1t}) = E(u_{1t}^2 | v_{1t})$ sowie $E(u_{1t}^4 | v_{1t})$ stetig in den stetigen Variablen aus v_{1t} . $f(v_{1t})\sigma^2(v_{1t})$ sei ebenso wie $f(v_{1t})E(u_{1t}^4 | v_{1t})$ gebunden im R^p .

(A9) $k^c \in \mathcal{K}_\nu$, $k^d \in \mathcal{K}_l^d$, $\bar{k}^c \in \mathcal{K}_2$ sowie $\bar{k}^d \in \mathcal{K}_0^d$, und für $N \rightarrow \infty$ gilt, $Nh^p \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, $Na^{2\nu}h^{p/2} \rightarrow 0$, $h/a^2 \rightarrow 0$. Dabei ist \mathcal{K}_l^d die Klasse von Kernfunktionen zweiter Ordnung, für die erfüllt ist, $k^d(0) = 1$ und $k^d(\nu) = O(1 + |\nu|^{-l+1})$.

Dann ist eine unter (A1), (A8), (A9) sowie H_0^{POOL} asymptotisch standardnor-

⁷Vgl. Baltagi et al. (1996), S. 349.

malverteilte Teststatistik gegeben durch (Theorem 1 in Baltagi et al. 1996):

$$Z_{POOL} = Nh^{p/2} \frac{J_{POOL}}{\sqrt{2\hat{\sigma}_{POOL}^2}}$$

mit
$$\hat{\sigma}_{POOL}^2 = \frac{1}{N(N-1)T^2h^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\hat{u}_{it}\hat{f}_{it})^2 (\hat{u}_{jt}\hat{f}_{jt})^2 \bar{K}_{it,jt}^2.$$

Ein konsistenter Test auf Poolbarkeit (Theorem 2 in Baltagi et al. 1996) besitzt die Entscheidungsregel, lehne H_0^{POOL} ab, falls $Z > z_{1-\alpha}$, und $z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Annahme (A8) ist dabei wieder eine übliche, wenig restriktive Standardbedingung über Momente und die Glattheit einiger Funktionen, und (A9) setzt erfüllbare Bedingungen für Kernfunktionen und Bandweiten.

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Test in einem ungleichgewichtigen Paneldatensatz angewendet werden kann: Zunächst gilt unter (A6) und H_0^{POOL}

$$E(u_{it}f(v_{it})c_{it} | v_{it}) = P_{1t}E(u_{it}f(v_{it}) | v_{it}) = 0,$$

und unter H_1^{POOL} besitzt

$$\begin{aligned} & E(u_{it}f(v_{it})c_{it}E(u_{it}f(v_{it})c_{it} | v_{it})f(v_{it})) \\ &= E\left(E(u_{it}f(v_{it})c_{it} | v_{it})^2 f(v_{it})\right) \\ &= P_{1t}^2 E\left(E(u_{it}f(v_{it}) | v_{it})^2 f(v_{it})\right) > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Gültigkeit. Eine Schätzung für (15) ist

$$\begin{aligned} J_{POOL,UB} &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it}\hat{f}_{it}c_{it} \left\{ \hat{E}\left(\hat{u}_{it}\hat{f}_{it}c_{it} | v_{it}\right) \hat{f}_{it} \right\} \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it}\hat{f}_{it}c_{it} \left\{ \frac{1}{(N-1)h^p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{u}_{jt}\hat{f}_{jt}c_{jt} \bar{K}_{it,jt} \right\} \end{aligned}$$

mit $\hat{f}_{it} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^p} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} c_{js}$. Die Verteilungseigenschaften einer aus $J_{POOL,UB}$ konstruierten Teststatistik faßt folgender Satz zusammen:

Satz 4: *Unter den Annahmen (A1), (A5), (A8) und (A9) und mit*

$$\sigma_{POOL,UB}^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T E\left(\sigma^4(v_{1t})f^5(v_{1t})\right) P_{1t}^2 \int \bar{K}^2(\nu)d\nu$$

ist

$$Z_{POOL,UB} = Nh^{p/2} \frac{J_{POOL,UB}}{\sqrt{2\sigma_{POOL,UB}^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

unter H_0^{POOL} . Eine konsistente Schätzfunktion für $\sigma_{POOL,UB}^2$ ist

$$\hat{\sigma}_{POOL,UB}^2 = \frac{1}{N(N-1)T^2h^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\hat{u}_{it}\hat{f}_{it})^2 (\hat{u}_{jt}\hat{f}_{jt})^2 \bar{K}_{it,jt}^2 c_{it}c_{jt}.$$

Der Beweis von Satz 4 findet sich im Anhang B. Es ist klar, daß sich die Konsistenz eines Tests mit rechtsseitigem Ablehnbereich analog zum Fall eines gleichgewichtigen Panels ergibt.

4.2 Tests auf die funktionale Form der Regressionsbeziehung

Auf der Idee der Konstruktion eines verallgemeinerten Conditional Moment Tests mit nichtparametrischer Gewichtungsfunktion basieren auch die Teststatistiken von Fan/Li (1996) für den Test des semiparametrischen partiell linearen Modells gegen eine nichtlineare Alternative und von Li/Wang (1995) für den Test einer parametrischen Modellformulierung gegen ein semiparametrisches Modell der Art (2). Beide Tests sind wie erwähnt für Querschnittsanalysen entwickelt und damit für Paneldaten ohne weiteren Beweis nur bei seriell unkorrelierten Störtermen geeignet. Auf die Darstellung der Verteilungseigenschaften in einem allgemeineren Paneldatenmodell sei hier zunächst verzichtet.

Fan/Li (1996) entwickeln einen Test der Nullhypothese

$$H_0^{SEMNP} : E(y_{it} | v_{it}) = x'_{it}\alpha + \theta(z_{it}) \quad \text{für ein } \alpha \in R^{q_1} \text{ und ein } \theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R$$

gegen die Hypothese

$$H_1^{SEMNP} : E(y_{it} | v_{it}) \neq x'_{it}\alpha + \theta(z_{it}) \quad \text{für alle } \alpha \in R^{q_1} \text{ und alle } \theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R.$$

Sei $y_{it} = E(y_{it} | v_{it}) + u_{it}$, dann gilt unter der Nullhypothese:

$$y_{it} = x'_{it}\alpha + \theta(z_{it}) + u_{it}$$

sowie $E(u_{it}E(u_{it} | v_{it})) = 0$. Die Grundlage für die Teststatistik bildet somit wieder eine dichtegewichtete Schätzung dieses Erwartungswerts:

$$J_{SEMNP} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} c_{it} \left\{ \frac{1}{(\sum_{t=1}^T N_t - 1)h^p} \sum_{\substack{s=1 \\ js \neq it}}^T \sum_{j=1}^N \hat{u}_{js} \hat{f}_{js} c_{js} \bar{K}_{it,js} \right\}$$

mit $\hat{u}_{it} = y_{it} - \hat{y}_{it} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{\alpha}_{(UB)}$ und $\hat{f}_{it} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} c_{js}$, $\hat{y}_{it} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} y_{js} c_{js} / \hat{f}_{it}$ sowie \hat{x}_{it} entsprechend definiert. $K_{it,js} \equiv K\left(\frac{z_{js} - z_{it}}{a}\right)$ und $\bar{K}_{it,js} \equiv \bar{K}\left(\frac{v_{js} - v_{it}}{h}\right)$ bezeichnen wieder Produkte univariater Kernfunktionen für die Variablen in z_{it} resp. v_{it} .

Sei u_{it} unabhängig identisch verteilt über alle i und t und ferner in (A8) $g(v_{it})$ ersetzt durch $\theta(z_{it})$ und $E(x_{it} | z_{it})$ sowie in (A9) $\lim_{N \rightarrow \infty} h/a^2 \rightarrow 0$ durch $\lim_{N \rightarrow \infty} h^p/a^{2q_2} \rightarrow 0$. Dann gilt unter (A1), (A5), (A8), (A9) und H_0^{SEMNP} (Theorem 4.1 in Fan/Li 1996 in Verbindung mit den Aussagen in Baltagi et al. 1996 sowie der Tatsache, daß unter den angegebenen Bedingungen in der Herleitung der Verteilungseigenschaften die gepoolte Panelstichprobe als Querschnittserhebung aufgefaßt werden kann):⁸

$$Z_{SEMNP} = \frac{\sum_{t=1}^T N_t h^{p/2} J_{SEMNP}}{\sqrt{2\hat{\sigma}_{SEMNP}^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (16)$$

mit

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}_{SEMNP}^2 \quad (17) \\ &= \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t (\sum_{t=1}^T N_t - 1) h^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ js \neq it}}^T \sum_{j=1}^N (\hat{u}_{it} \hat{f}_{it})^2 (\hat{u}_{js} \hat{f}_{js})^2 c_{it} c_{js} \bar{K}_{it,js}^2, \end{aligned}$$

⁸Diese Voraussetzungen ergeben sich im wesentlichen aus der Übertragung der Bedingungen in Fan/Li 1996 von der Querschnittsbetrachtung auf die Paneldatenanalyse, sind aber noch etwas allgemeiner als die der Autoren, da Fan/Li (1996), im Gegensatz zu Baltagi et al. (1996), diskrete Variablen in v_{it} ausschliessen. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß die Teststatistiken Z_{POOL} und Z_{SEMNP} aufgrund ihrer äquivalenten Konstruktion unter vergleichbaren Bedingungen asymptotisch die gleichen Eigenschaften besitzen.

und ein konsistenter Test besitzt einen rechtsseitigen Ablehnbereich mit kritischem Wert $z_{1-\alpha}$.

Anzumerken ist hier, daß die Formulierung der Nullhypothese H_0^{SEMNP} schärfer ist als die Modellspezifikation (2), die $E(u_{it} | z_{it}, x_{it})$ nicht voraussetzt, da eine beliebige Korrelation zwischen x_{it} und u_{it} zugelassen wird. In diesem Fall ist der Test nach Fan/Li (1996) nicht sinnvoll; er wird immer eine gewisse Macht gegen das wahre Modell und damit einen positiven Size-Bias besitzen. Ein Hypothesenpaar, das der Modellspezifikation (2) Rechnung trägt, lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^{SEMNP} : E(y_{it} | w_{it}, z_{it}) &= x(w_{it}, z_{it})' \alpha + \theta(z_{it}) \quad \text{für ein } \alpha \in R^{q_1} \text{ und} \\ &\quad \text{ein } \theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R \\ \tilde{H}_1^{SEMNP} : E(y_{it} | w_{it}, z_{it}) &\neq x(w_{it}, z_{it})' \alpha + \theta(z_{it}) \quad \text{für alle } \alpha \in R^{q_1} \text{ und} \\ &\quad \text{alle } \theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R \end{aligned}$$

mit $x(w_{it}, z_{it}) \equiv E(x_{it} | w_{it}, z_{it})$ und einem IV-Vektor w_{it} , der Annahme (A3) erfüllt. Dann folgt mit

$$y_{it} = x_{it}' \alpha + \theta(z_{it}) + u_{it}$$

unter der Nullhypothese, $E(u_{it} | w_{it}, z_{it}) = 0$ und ebenso

$$E(u_{it} f(z_{it}) E(u_{it} f(z_{it}) | w_{it}, z_{it}) f(w_{it}, z_{it})) = 0,$$

während unter der Gegenhypothese

$$E\left(E(u_{it} f(z_{it}) | w_{it}, z_{it})^2 f(w_{it}, z_{it})\right) > 0 \quad (18)$$

Gültigkeit besitzt. Eine Schätzung von (18) ist gegeben durch

$$\tilde{J}_{SEMNP} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} c_{it} \left\{ \frac{1}{(\sum_{t=1}^T N_t - 1) h^p} \sum_{\substack{s=1 \\ j=1 \\ js \neq it}}^T \sum^N \hat{u}_{js} \hat{f}_{js} c_{js} \tilde{K}_{it,js} \right\}$$

mit $\tilde{K}_{it,js} \equiv \bar{K}\left(\frac{\tilde{v}_{js} - \tilde{v}_{it}}{h}\right)$, $\tilde{v}_{it} = (w_{it}, z_{it})$. Aus dem Beweis von Theorem 4.1 in Fan/Li (1996) ist zu sehen, daß mit \tilde{J}_{SEMNP} statt J_{SEMNP} und $\tilde{K}_{it,js}^2$ statt $\bar{K}_{it,js}^2$ die Aussagen (16) und (17) weiterhin Gültigkeit besitzen.

Li/Wang (1995) schlagen, basierend auf den Arbeiten von Li (1994) und Zheng (1996), eine Statistik vor für den Test der Nullhypothese

$$H_0^{PARSEM} : E(y_{it} | v_{it}) = x'_{it}\alpha + h(z_{it}, \beta) \quad \text{für ein } \alpha \in R^{q_1} \text{ und ein } \beta \in R^{q_2}$$

mit parametrischer Funktion $h(\cdot)$ gegen die Hypothese

$$H_1^{PARSEM} : E(y_{it} | v_{it}) = x'_{it}\alpha + \theta(z_{it}) \quad \text{für ein } \alpha \in R^{q_1} \text{ und eine Funktion } \theta(\cdot) : R^{q_2} \rightarrow R, \text{ mit } \theta(z_{it}) \neq h(z_{it}, \beta) \text{ für jedes } \beta \in R^{q_2}.$$

Bezeichne ε_{it} den Störterm des Modells unter der Nullhypothese. Dann gilt unter H_0^{PARSEM} : $E(\varepsilon_{it}E(\varepsilon_{it} | z_{it})) = 0$. Eine dichtegewichtete Schätzung dieses Erwartungswerts ist

$$J_{PARSEM} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{it} c_{it} \left\{ \frac{1}{(\sum_{t=1}^T N_t - 1)h^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{\substack{j=1 \\ js \neq it}}^N \hat{\varepsilon}_{js} c_{js} \bar{K}_{it,js} \right\},$$

wobei $\hat{\varepsilon}_{it} = y_{it} - x'_{it}\hat{\alpha}_{(UB)} - h(z_{it}, \hat{\beta}_{(UB)})$, und $\hat{\alpha}_{(UB)}$ ist ein unter H_0^{PARSEM} und H_1^{PARSEM} \sqrt{N} -konsistenter semiparametrischer Schätzer und $\hat{\beta}_{(UB)}$ ein \sqrt{N} -konsistenter Schätzer auf Basis des Nullmodells.⁹ $\bar{K}_{it,js} \equiv \bar{K}\left(\frac{z_{js}-z_{it}}{h}\right)$ bezeichnet wieder ein Produkt von univariaten Kernfunktionen \bar{k} für die Variablen in z_{it} .

Sei ε_{it} unabhängig, identisch verteilt über alle i und t und in (A1) und (A8) u_{it} ersetzt durch ε_{it} sowie $g(v_{it})$ durch $h(z_{it}, \cdot)$. Ferner werde folgende weitere Annahme spezifiziert:

- (A10) $\hat{\alpha}_{(UB)}$ ist unter H_0^{PARSEM} und H_1^{PARSEM} ein \sqrt{N} -konsistenter Schätzer für α , $\hat{\beta}_{(UB)}$ ist unter H_0^{PARSEM} \sqrt{N} -konsistent bzgl. β . $\bar{k} \in \mathcal{K}_2$, $\bar{k}(\nu) \geq 0$ für alle ν , und für $N \rightarrow \infty$ gilt, $Nh^{q_2} \rightarrow \infty$.

⁹Werden zur Ermittlung von $\hat{\varepsilon}_{it}$ die Parametervektoren α und β auf Basis des Nullmodells geschätzt, ist die Teststatistik Z_{PARSEM} zwar weiterhin asymptotisch standardnormalverteilt, der Test ist aber nur dann konsistent, wenn zusätzlich gilt, $P(E(x_{1t} | z_{1t})(\alpha - \bar{\alpha}) + \theta(z_{1t}) - h(z_{1t}, \bar{\beta})) < 1$. Dabei bezeichnen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ die Wahrscheinlichkeitsgrenzwerte der auf Basis von H_0^{PARSEM} geschätzten Vektoren $\tilde{\alpha}_{(UB)}$ und $\hat{\beta}_{(UB)}$ unter der Gegenhypothese (Li/Wang 1995, S. 6).

Dann gilt unter (A1), (A5), (A8), (A10) sowie H_0^{PARSEM} (Theorem 1 in Li/Wang 1995 in Verbindung mit der Tatsache, daß unter den spezifizierten Voraussetzungen die gepoolte Panelstichprobe als Querschnittserhebung aufgefaßt werden kann):

$$Z_{PARSEM} = \frac{\sum_{t=1}^T N_t h^{q_2/2} J_{PARSEM}}{\sqrt{2\hat{\sigma}_{PARSEM}^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

mit
$$\hat{\sigma}_{PARSEM}^2 = \frac{1}{(\sum_{t=1}^T N_t)^2 h^{q_2}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{\varepsilon}_{it}^2 \hat{\varepsilon}_{js}^2 c_{it} c_{js} \bar{K}_{it,js}^2 .$$

Der Test mit der Entscheidungsregel, lehne H_0^{PARSEM} ab, falls $Z_{PARSEM} > z_{1-\alpha}$, ist konsistent.

Im Spezialfall des Tests auf ein lineares Modell gegen eine semiparametrische partiell lineare Spezifikation ist $h(z_{it}, \beta) = z'_{it}\beta$, und ein unter H_0^{PARSEM} \sqrt{N} -konsistenter Schätzer für β ergibt sich im allgemeinen aus der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate. Ist jedoch $y_{it} = x'_{it}\alpha + z'_{it}\beta + \varepsilon_{it}$ zwar die wahre strukturelle Form des Modells, z_{it} aber eine endogene Variable, so ist weder der OLS-Schätzer für β konsistent noch gilt, $E(y_{it} | x_{it}, z_{it}) = x'_{it}\alpha + z'_{it}\beta$. Die letzte Gleichung ist auch dann nicht erfüllt, wenn x_{it} und ε_{it} korreliert sind. Beobachtet sei aber hier, daß Li/Wang (1995) nicht eigentlich die Hypothese $E(\varepsilon_{it} | z_{it}, x_{it}) = 0$, sondern die schwächere Annahme $E(\varepsilon_{it} | z_{it}) = 0$ testen, bzw. allgemein

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^{PARSEM} &: E(y_{it} - x'_{it}\alpha | z_{it}) = h(z_{it}, \beta) \\ \text{gegen} \quad \tilde{H}_1^{PARSEM} &: E(y_{it} - x'_{it}\alpha | z_{it}) \neq h(z_{it}, \beta) . \end{aligned}$$

Der Test ist damit unberührt von einer Korrelation zwischen x_{it} und ε_{it} , und mit einem IV-Vektor \tilde{z}_{it} für eine endogene Variable z_{it} im linearen Modell läßt sich ferner das Hypothesenpaar

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^{PARSEM} &: E(y_{it} - x'_{it}\alpha | \tilde{z}_{it}) = z(\tilde{z}_{it})'\beta \\ \tilde{H}_1^{PARSEM} &: E(y_{it} - x'_{it}\alpha | \tilde{z}_{it}) \neq z(\tilde{z}_{it})'\beta \end{aligned}$$

formulieren, mit $z(\tilde{z}_{it}) \equiv E(z_{it} | \tilde{z}_{it})$ und $E(\varepsilon_{it} | \tilde{z}_{it}) = 0$ unter \tilde{H}_0^{PARSEM} . Ein \sqrt{N} -konsistenter Schätzer für β resultiert dann z.B. aus einem 2SLS-Verfahren, also der Kleinst-Quadrate-Regression von $y_{it} - x'_{it}\hat{\alpha}$ auf \hat{z}_{it} , einer

Schätzung von z_{it} aus der reduzierten Form des Modells. Die Variablen \hat{z}_{it} und ε_{it} sind asymptotisch orthogonal. Somit kann der Test auf der Grundlage einer Schätzung von $E(\varepsilon_{it} E(\varepsilon_{it} | \hat{z}_{it}))$ durchgeführt werden:

$$\tilde{J}_{PARSEM} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_{it} c_{it} \left\{ \frac{1}{(\sum_{t=1}^T N_t - 1) h^{q_2}} \sum_{\substack{s=1 \\ j \neq it}}^N \hat{\varepsilon}_{js} c_{js} \tilde{K}_{it,js} \right\}$$

mit $\varepsilon_{it} = y_{it} - x'_{it} \hat{\alpha} - z'_{it} \hat{\beta}$ und $\tilde{K}_{it,js} \equiv \bar{K} \left(\frac{\hat{z}_{js} - \hat{z}_{it}}{h} \right)$.

4.3 Tests auf serielle Korrelation

Zur Überprüfung einer seriellen Korrelation in den Störtermen eines semiparametrischen Modells der Art (2), für das ferner gelte $E(u_{1t} | z_{1t}, x_{1t}) = 0$, schlagen Li/Hsiao (1996) zwei Teststatistiken vor, von denen die eine, ausgehend von $\rho_{ts} = E(u_{1t} u_{1s}) = 0$ für alle $t = 1, \dots, T$, $s = 1, \dots, T$, $s \neq t$, in einem Martingaldifferenz-Prozeß, eine Nullkorrelation erster Ordnung testet, also $\rho_{t,t-1} = 0$, und die andere die Gültigkeit des Martingaldifferenz-Prozesses im gesamten Beobachtungszeitraum. Letzteres Verfahren ist damit geeignet, die Abwesenheit von zufälligen Individualeffekten μ_1 im Fehlerterm u_{1t} , wie typischerweise in Modellen mit additiven Fehlerkomponenten $u_{1t} = \mu_1 + \epsilon_{1t}$ spezifiziert, statistisch zu überprüfen. Die Teststatistiken stellen Verallgemeinerungen des Durbin-Watson-Tests (Durbin/Watson 1950) - bzw. im Fall von verzögerten endogenen Variablen als Regressoren der Durbin h-Statistik (Durbin 1970) - auf serielle Korrelation erster Ordnung sowie der Breusch-Pagan-Teststatistik (Breusch/Pagan 1980) auf Individualeffekte in parametrischen Regressionsmodellen auf den gewählten semiparametrischen Ansatz dar. Sie basieren wie erwähnt jeweils auf der Nullhypothese

$$H_0^{SK1/IEF} : \text{Der Fehlerterm } u_{1t} \text{ folgt einem Martingaldifferenz-Prozeß.}$$

Betrachtet sei zunächst der Test auf eine Nullkorrelation erster Ordnung. Unter einer seriellen Korrelation erster Ordnung ist $\rho_{t,t-1} \neq 0$, und unter der Nullhypothese besitzt $\rho_{t,t-1} = 0$ Gültigkeit. $\rho_{t,t-1} = 0$ kann aber immer nur dann erfüllt sein, wenn auch $E(u_{1t} f(z_{1t}) u_{1,t-1} f(z_{1,t-1})) = 0$ ist (Li/Hsiao

1996, S. 5). Damit bildet eine Schätzung dieses letzteren Erwartungswerts die Grundlage für den Test:

$$J_{SK1} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{it} \hat{f}_{i,t-1}. \quad (19)$$

Hierbei ist wieder $\hat{u}_{it} = y_{it} - \hat{y}_{it} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{\alpha}$, und $\hat{y}_{it} \equiv \hat{E}(y_{it} \mid z_{it})$, $\hat{x}_{it} \equiv \hat{E}(x_{it} \mid z_{it})$ sind Kernregressionsschätzungen mit der Bandweite a und Produktkern $K(\nu)$, und \hat{f}_{it} bezeichnet eine entsprechende Kerndichtschätzung der Dichtefunktion $f(z_{it})$. $\hat{\alpha}$ ist wie im Abschnitt 3.1 errechnet. Seien zwei weitere Bedingungen spezifiziert:

(A3') $E(u_{1t} \mid x_{1t}, z_{1t}) = 0$, $E(x_{1t}^{4+\delta}) < \infty$ und $E(x_{1t} \mid z_{1t}) \in \mathcal{G}_\nu^{4+\delta}$ für ein beliebiges $\delta > 0$ und alle $t = 1, \dots, T$.

(A4'') $k \in \mathcal{K}_\nu$, für $N \rightarrow \infty$ gilt, $a \rightarrow 0$, $Na^{\max(2q_2-4, q_2)} \rightarrow \infty$ und $Na^{2\nu} \rightarrow 0$.

(A3') ergibt sich aus (A3) mit x_{it} statt w_{it} , und (A4'') setzt erfüllbare, aber schärfere Bedingungen für die verwendete Kernfunktion und Bandweite als (A4) und (A4'). Dann gilt unter (A1), (A2), (A3') und (A4'') sowie $H_0^{SK1/IEF}$ (Theorem 1 in Li/Hsiao 1996):

$$\sqrt{NT} J_{SK1} \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SK1}^2)$$

mit

$$\sigma_{SK1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left(\left\{ \left(u_{1,t-1} f_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} \mid z_{1t}))' f_{1t} (B^{-1})' \Phi \right) u_{1t} f_{1t} \right\}^2 \right).$$

Dabei ist $B = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left((x_{1t} - E(x_{1t} \mid z_{1t})) (x_{1t} - E(x_{1t} \mid z_{1t}))' f_{1t}^2 \right)$ und $\Phi = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left((x_{1t} - E(x_{1t} \mid z_{1t})) f_{1t} u_{1,t-1} f_{1,t-1} \right)$. Ein konsistenter Schätzer für σ_{SK1}^2 ist gegeben durch

$$\hat{\sigma}_{SK1}^2 = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{i,t-1} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} (\hat{B}^{-1})' \hat{\Phi} \right) \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} \right\}^2 \quad (20)$$

$$\text{mit } \hat{B} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it})(x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2 \quad (21)$$

$$\text{und } \hat{\Phi} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it}) \hat{f}_{it} \hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{i,t-1}, \quad (22)$$

so daß $\sqrt{NT} \frac{J_{SK1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{SK1}^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Das Verfahren läßt sich leicht durch Ersetzen von $t - 1$ durch $t - s$ in den oben dargestellten Zusammenhängen auf das Testen der Hypothese $\rho_{t,t-s} = 0$, $s > 1$, verallgemeinern (Kniesner/Li 1996).

Über die Anwendbarkeit des Testverfahrens in einem ungleichgewichtigen Paneldatensatz gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 5: *Unter (A1), (A2), (A3'), (A4''), (A5) sowie $H_0^{SK1/IEF}$ gilt mit*

$$J_{SK1,UB} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{it} \hat{f}_{i,t-1} c_{it} c_{i,t-1},$$

wobei $\hat{u}_{it} = y_{it} - \hat{y}_{it} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{\alpha}_{UB}$ und \hat{y}_{it} , \hat{x}_{it} sowie \hat{f}_{it} Kernregressions- resp. Kerndichteschätzungen aus dem Unbalanced Panel bezeichnen,

$$\sqrt{NT} J_{SK1,UB} \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SK1,UB}^2)$$

mit

$$\sigma_{SK1,UB}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(\eta_{1t}^2),$$

$$\eta_{1t} = u_{1t} f_{1t} c_{1t} \left(u_{1,t-1} f_{1,t-1} c_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right),$$

$$\Phi_{UB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E((x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t})) f_{1t} u_{1,t-1} f_{1,t-1}) P_{1,t,t-1}$$

und B_{UB} definiert wie in Satz 1. Ein konsistenter Schätzer für $\sigma_{SK1,UB}^2$ ist gegeben durch

$$\hat{\sigma}_{SK1,UB}^2 = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} c_{it} \left(\hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{i,t-1} c_{i,t-1} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} c_{it} (\hat{B}_{UB}^{-1})' \hat{\Phi}_{UB} \right) \right\}^2,$$

$$\hat{\Phi}_{UB} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it}) \hat{f}_{it} \hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{i,t-1} c_{it} c_{i,t-1},$$

$$\hat{B}_{UB} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it})(x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it}^2 c_{it}.$$

Der Beweis von Satz 5 findet sich im Anhang B.

Die Gültigkeit der Martingaldifferenz-Eigenschaft im gesamten Beobachtungszeitraum und damit die Abwesenheit von Individualeffekten läßt sich mittels einer Erweiterung des Ansatzes (19) auf

$$J_{IEF} = \frac{1}{NT(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{u}_{is} \hat{f}_{it} \hat{f}_{is}$$

testen. Dann folgt unter $H_0^{SK1/IEF}$ sowie (A1), (A2), (A3') und (A4''):

$$\sqrt{NT(T-1)/2} J_{IEF} \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{IEF}^2)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{IEF}^2 &= \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t}}^T E \left\{ \left(u_{1s} f_{1s} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B^{-1})' \tilde{\Phi} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(u_{1s'} f_{1s'} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B^{-1})' \tilde{\Phi} \right) u_{1t}^2 f_{1t}^2 \right\}, \\ \tilde{\Phi} &= \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T E \left((x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t})) f_{1t} u_{1s} f_{1s} \right) \end{aligned}$$

und B wie in σ_{SK1}^2 definiert (Corollary 2 in Li/Hsiao 1996).¹⁰ Ein konsistenter Schätzer für σ_{IEF}^2 resultiert wie in (20) bis (22) durch Ersetzen der unbekannt bedingten Erwartungswerte und Dichtefunktionen durch ihre nichtparametrischen Schätzwerte und anschließender Summation über alle Individuen.

Für die Anwendung des Testverfahrens in einem ungleichgewichtigen Panel Datensatz ergibt sich analog:

Satz 6: *Unter (A1), (A2), (A3'), (A4'') und (A5) sowie $H_0^{SK1/IEF}$ gilt mit*

$$J_{IEF,UB} = \frac{1}{NT(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{u}_{is} \hat{f}_{it} \hat{f}_{is} c_{it} c_{is},$$

$\hat{u}_{it}, \hat{f}_{it}$ wie in Satz 5,

$$\sqrt{NT(T-1)/2} J_{IEF,UB} \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{IEF,UB}^2)$$

¹⁰Nach Li/Hsiao (1996) enthält σ_{IEF}^2 statt $\tilde{\Phi}$ auch Φ wie in σ_{SK1}^2 . Aus der Herleitung der Verteilungseigenschaft ist jedoch leicht zu sehen, daß dieses nicht richtig ist.

mit

$$\begin{aligned}\sigma_{IEF,UB}^2 &= \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t}}^T E(\eta_{1s} \eta_{1s'}) \\ \eta_{1\tau} &= \left(u_{1\tau} f_{1\tau} c_{1\tau} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \right), \quad \tau = s, s', \\ \tilde{\Phi}_{UB} &= \frac{1}{T(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T E((x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t})) f_{1t} u_{1s} f_{1s}) P_{1,ts}\end{aligned}$$

und B_{UB} wie in Satz 1 definiert. Ein konsistenter Schätzer für $\sigma_{IEF,UB}^2$ ist

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{IEF,UB}^2 &= \frac{2}{NT(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t}}^T \sum_{i=1}^N \left(\hat{u}_{is} \hat{f}_{is} c_{is} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} c_{it} (\hat{B}_{UB}^{-1})' \hat{\Phi}_{UB} \right) \\ &\quad \times \left(\hat{u}_{is'} \hat{f}_{is'} c_{is'} - (x_{it} - \hat{x}_{it})' \hat{f}_{it} c_{it} (\hat{B}_{UB}^{-1})' \hat{\Phi}_{UB} \right) \hat{u}_{it}^2 \hat{f}_{it}^2 c_{it}, \\ \hat{\Phi}_{UB} &= \frac{1}{NT(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it}) \hat{f}_{it} u_{is} \hat{f}_{is} c_{it} c_{is}\end{aligned}$$

und \hat{B}_{UB} wie in Satz 5.

Der Beweis von Satz 6 befindet sich im Anhang B.

Die Varianzen der Teststatistiken $\sqrt{NT} J_{SK1}$ und $\sqrt{NT(T-1)/2} J_{IEF}$ lassen sich unter einer strengen Exogenität der Variablen v_{it} vereinfachen: Wegen $E(u_{i,t-1} | x_{it}, z_{it}, z_{i,t-1}) = 0$ ist in diesem Fall auch $\Phi = 0$ bzw. $\tilde{\Phi} = 0$, und damit folgt (Corollary 1 in Li/Hsiao 1996):

$$\begin{aligned}\sigma_{SK1}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(u_{1,t-1} f_{1,t-1} u_{1t} f_{1t})^2, \\ \sigma_{IEF}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t}}^T E(u_{1s} f_{1s} u_{1s'} f_{1s'} (u_{1t} f_{1t})^2).\end{aligned}$$

Entsprechend verändern sich die Schätzfunktionen für diese Varianzen ($\hat{\Phi} = 0$ bzw. $\hat{\tilde{\Phi}} = 0$ in $\hat{\sigma}_{SK1}^2$ resp. $\hat{\sigma}_{IEF}^2$). Die Verteilungseigenschaften der Teststatistiken lassen sich dann außerdem statt unter (A4'') auch unter der schwächeren Bedingung (A4') zeigen. Daß diese Vereinfachung auch für einen ungleichgewichtigen Paneldatensatz Gültigkeit besitzt, ist leicht zu sehen. Auf die

Darstellung der Varianzen und ihrer Schätzfunktionen sei daher hier verzichtet.

Es ist klar, daß eine Ablehnung der Nullhypothese auf Basis des $J_{IEF(UB)}$ -Tests nur gegen einen Martingaldifferenz-Prozeß, aber nicht für Individualeffekte spricht, sondern auch durch eine andere Korrelation in den Störtermen bedingt sein kann. Insofern scheint es sinnvoll, in Anwendungen beide Tests durchzuführen und das Ergebnis gemeinsam zu interpretieren (vgl. Li/Hsiao 1996): Der $J_{SK1(UB)}$ -Test dürfte eine höhere Güte gegen eine serielle Korrelation erster Ordnung als der $J_{IEF(UB)}$ -Test besitzen, während zu erwarten ist, daß im Fall einer seriellen Korrelation höherer Ordnung die Macht des letzteren Tests größer ist als die des ersteren. Testergebnisse können somit hinsichtlich der Ordnung der seriellen Korrelation interpretiert werden, und die Vermutung einer seriellen Korrelation niedriger Ordnung spricht gegen die Existenz von Individualeffekten.

5 Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellt eine breite Auswahl an Schätz- und Testverfahren für ein semiparametrisches partiell lineares Modell für die Paneldatenanalyse vor, die neben der Ermittlung von konsistenten Schätzfunktionen für die fixen und die variablen Koeffizienten zum umfassenden Testen der Modellspezifikation in gleich- und ungleichgewichtigen Datensätzen geeignet ist. Damit ist ein Instrumentarium für eine sorgfältige Analyse von Regressionsmodellen in empirischen Arbeiten gegeben. Hinsichtlich der praktischen Anwendung der Verfahren bleiben jedoch noch einige Fragen offen, die einen Anlaß für weitere Untersuchungen geben sollten:

Zunächst sind die Verteilungseigenschaften der Tests des semiparametrischen partiell linearen Modells gegen eine nichtparametrische Alternative bzw. gegen eine parametrische Regressionsbeziehung in der dargestellten Form aufgrund ihrer Entwicklung für Querschnittsanalysen ohne weiteren Beweis nur bei seriell unkorrelierten Störtermen gültig. Die hier nicht dargestellte An-

wendung der Teststatistiken in einem allgemeinen gleich- oder ungleichgewichtigen Paneldatenmodell zeigt jedoch, daß analog zur Teststatistik J_{POOL} die Korrelation der Störterme keine Relevanz hinsichtlich der Verteilungseigenschaften von J_{SEMNP} oder J_{PARSEM} besitzt, eine Eigenschaft, deren Gültigkeit noch in einer folgenden Analyse ausführlich zu beweisen ist. Des weiteren wurden noch keine Aussagen über die Verteilungseigenschaften der Schätzer $\hat{E}(\delta(z_{it}))$ und der geschätzten bedingten Erwartungswerte $\hat{E}(\beta(z_{it}) | z_{it}^l = z^l)$ getroffen. Auch hier sind weitere Untersuchungen notwendig, um letztlich Auswertungen bezüglich der Signifikanz des durchschnittlichen Einflusses der Regressoren z_{it} treffen oder Konfidenzbänder für die bedingten Erwartungswerte $E(\delta(z_{it}) | z_{it}^l)$ bestimmen zu können. Eine Anwendung der vorgestellten Schätz- und Testverfahren erfordert ferner die Wahl von Bandbreiten und Kernfunktionen, und während letztere die Schätz- und Testergebnisse wie üblich kaum beeinflussen dürften, können die erzielten Resultate erheblich von den gewählten Bandbreiten abhängig sein. Hier scheint es sinnvoll, wie üblich mit alternativen Glättungsparametern zu arbeiten und Ergebnisse bandbreitenabhängig zu interpretieren. Problematisch ist weiterhin, daß die Kleinstichprobeneigenschaften der Schätz- und Teststatistiken erheblich von ihren asymptotischen Eigenschaften abweichen können. So ergeben Monte-Carlo-Simulationen keine befriedigende Approximation der Verteilung von J^{PARSEM} durch die Normalverteilung bei geringen Stichprobenumfängen (Li/Wang 1995), während Simulationsstudien für Paneldaten mit nur 50 bzw. 100 Querschnittsbeobachtungen zu 10 Zeitpunkten gute Ergebnisse hinsichtlich Size und Power der Tests auf serielle Korrelation zeigen (Li/Hsiao 1996). Weitere Monte-Carlo-Simulationen können Aufschluß über die Eigenschaften und damit die Anwendbarkeit der Schätz- und Testverfahren in kleinen Stichproben geben, ebenso wie über ein Bootstrappen der Testverteilungen, wie es für geringe Stichprobengrößen z.B. von Li/Wang (1995) vorgeschlagen wird. Letztlich wäre es noch interessant, Mechanismen für die Beobachtbarkeit der Stichprobenvariablen über parametrische oder semiparametrische Ansätze explizit zu formulieren und Schätzungen in Modellen mit Selektivitätsverzerrungen zu betrachten.

Literaturverzeichnis

- Ai, C. u. D. McFadden (1997):** Estimation of Some Partially Specified Nonlinear Models, *Journal of Econometrics* 76, S. 1-37.
- Baltagi, B.H., J. Hidalgo u. Q. Li (1996):** A Nonparametric Test for Poolability Using Panel Data, *Journal of Econometrics* 75, S. 345-367.
- Bhattacharya, P.K. u. P.-L. Zhao (1997):** Semiparametric Inference in A Partial Linear Model, *The Annals of Statistics* 25, S. 224-262.
- Breusch, T.S. u. A.R. Pagan (1980):** The Lagrange Multiplier Test and Its Applications to Model Specification in Econometrics, *Review of Economics Studies* 47, S. 239-253.
- Cleveland, W.S. (1979):** Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatter Plots, *Journal of the American Statistical Association* 74, S. 829-836.
- Durbin, J. (1970):** Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression When Some of the Regressors are Lagged Dependent Variables, *Econometrica* 38, S. 410-421.
- Durbin, J. u. G.S. Watson (1950):** Testing Serial Correlation in Least Squares Regression, *Biometrika* 37, S. 409-428.
- Fan, J. (1992):** Design-Adaptive Nonparametric Regression, *Journal of the American Statistical Association* 87, S. 998-1004.
- Fan, J. (1993):** Local Linear Smoothing and Their Minimax Efficiencies, *The Annals of Statistics* 21, S. 196-216.
- Fan, J. u. I. Gijbels (1992):** Variable Bandwidth and Local Linear Regression Smoothers, *The Annals of Statistics* 20, S. 2008-2036.
- Fan, Y. u. Q. Li (1996):** Consistent Model Specification Tests: Omitted Variables and Semiparametric Functional Forms, *Econometrica* 64, S. 865-890.

- Härdle, W. (1990):** Applied Nonparametric Regression, Cambridge University Press.
- Härdle, W. u. T.M. Stoker (1989):** Investigating Smooth Multiple Regression by the Method of Average Derivatives, Journal of the American Statistical Association 84, S. 986-995.
- Hastie, T.J. u. C. Loader (1993):** Local Regression: Automatic Kernel Carpentry, Statistical Science 8, S. 120-143.
- Hastie, T.J. u. R.J. Tibshirani (1990):** Generalized Additive Models, Chapman & Hall.
- Hidalgo, J. (1995):** A Nonparametric Conditional Moment Test for Structural Stability, Econometric Theory 11, S. 671-698.
- Horowitz, J.L. u. W. Härdle (1986):** Direct Semiparametric Estimation of Single-Index Models With Discrete Covariates, Journal of the American Statistical Association 91, S. 1632-1640.
- Hübler, O. u. A. König (1997):** Produktmarkteinflüsse, Renten und Löhne - Eine semiparametrische Untersuchung, erscheint in: Gerlach, K., O. Hübler u. W. Meyer (Hg.), Ökonomische Analysen betrieblicher Strukturen und Entwicklungen - Das Hannoveraner Firmenpanel, Campus Verlag.
- Kniesner, T.J. u. Q. Li (1996):** Semiparametric Panel Data Models with Dynamic Adjustment: Theoretical Considerations and an Application to Labor Supply, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q. (1994):** A Consistent Test for Linearity in Partially Linear Regression Models, Discussion Paper Nr. 1994-7, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q. (1996):** On the Root-N-Consistent Semiparametric Estimation of Partially Linear Models, Economics Letters 51, S. 277-285.

- Li, Q. u. C. Hsiao (1996):** Testing Serial Correlation in Semiparametric Panel Data Models, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q., X. Lu u. A. Ullah (1995):** Estimating Average Derivative by Local Least Squares Method, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q. u. T. Stengos (1994):** Root-N-Consistent Semiparametric Estimation of a Dynamic Panel Data Model, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q. u. T. Stengos (1996):** Semiparametric Estimation of Partially Linear Panel Data Models, *Journal of Econometrics* 71, S. 389-397.
- Li, Q. u. A. Ullah (1996):** Estimating Partially Linear Panel Data Models With One-Way Error Components Errors, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, Q. u. S. Wang (1995):** A Simple Consistent Bootstrap Test for a Parametric Regression Function, mimeo, Department of Economics, University of Guelph.
- Li, W. (1996):** Asymptotic Equivalence of Estimators of Average Derivatives, *Economics Letters* 52, S. 241-245.
- Liu, Z. u. X. Lu (1997):** Root-N-Consistent Semiparametric Estimation of Partially Linear Models Based on K-NN Method, *Econometric Reviews* 16, S. 411-420.
- Mammen, E. u. S. Van De Geer (1997):** Penalized Quasi-Likelihood Estimation in Partial Linear Models, *The Annals of Statistics* 25, S. 1014-1035.
- Nadaraya, E.A. (1964):** On Regression Estimators, *Theory of Probability and Its Applications* 9, S. 157-159.

- Newey, W.K. (1985):** Maximum Likelihood Specification Testing and Conditional Moment Tests, *Econometrica* 53, S. 1047-1070.
- Powell, J.L., J.H. Stock u. T.M. Stoker (1989):** Semiparametric Estimation of Index Coefficients, *Econometrica* 57, S. 1403-1430.
- Rilstone, P. (1991):** Nonparametric Hypothesis Testing With Parametric Rates of Convergence, *International Economic Review* 32, S. 209-227.
- Robinson, P.M. (1988):** Root-N-Consistent Semiparametric Regression, *Econometrica* 56, S. 931-954.
- Speckman, P. (1988):** Kernel Smoothing in Partially Linear Models, *Journal of the Royal Statistical Society B* 50, S. 413-436.
- Stoker, T.M. (1991):** Equivalence of Direct, Indirect, and Slope Estimators of Average Derivatives, in: Barnett, W.A., J. Powell und G.E. Tauchen (Hg.), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, Cambridge University Press, S. 99-118.
- Stone, C. (1977):** Consistent Nonparametric Regression, *Annals of Statistics* 5, S. 595-626.
- Tauchen, G. (1985):** Diagnostic Testing and Evaluation of Maximum Likelihood Models, *Journal of Econometrics* 30, S. 415-443.
- Watson, G.S. (1964):** Smooth Regression Analysis, *Sankhya Ser. A* 26, S. 359-372.
- Yatchew, A. (1997):** An Elementary Estimator of the Partial Linear Model, *Economics Letters* 57, S. 135-143.
- Zheng, J.X. (1996):** A Consistent Test of Functional Form via Nonparametric Estimation Techniques, *Journal of Econometrics* 75, S. 263-289.

A Definitionen

Definition 1 (nach Robinson 1988, S. 937)

\mathcal{K}_ν ist die Klasse der geraden Funktionen $k : R \rightarrow R$, für die erfüllt ist: $\int_R u^i k(u) du = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, \nu - 1$, $k(u) = O((1 + |u|^{1+\nu+\epsilon})^{-1})$ für ein $\epsilon > 0$.

Definition 2 (nach Robinson 1988, S. 939)

\mathcal{G}_μ^α , $\mu > 0$, $\alpha > 0$, ist die Klasse der Funktionen $g : R^d \rightarrow R$, für die erfüllt ist: $g(z)$ ist $(m - 1)$ -mal partiell differenzierbar für alle z , wobei $m - 1 \leq \mu \leq m$; ferner gilt $E(g(z)^\alpha) < \infty$ sowie $E\left(\left(\frac{\partial^l g(z)}{\partial z^l}\right)^\alpha\right) < \infty$ für alle $l = 1, \dots, m - 1$; $\sup_{y \in \phi_{z\rho}} |g(y) - g(z) - Q_g(y, z)| / |y - z|^\mu \leq h_g(z)$ für alle z und ein $\rho > 0$, wobei $\phi_{z\rho} = \{y : |y - z| < \rho\}$ und $Q_g = 0$ für $m = 1$ und $Q_g = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial^l g(z)}{\partial z^l} (y - z)^l$ für $m > 1$ sowie $E(h_g(z)^\alpha) < \infty$.

B Beweise

Bezeichne $A_1 \sim A_2$, daß A_1 eine Ordnung in Wahrscheinlichkeit besitzt, die höchstens gleich der von A_2 ist, und ferner seien $K_{it,js}$ und N_t jeweils definiert wie in den Abschnitten 3 und 4 sowie $P_{1,ts} \equiv P(c_{1t} = 1 \text{ und } c_{1s} = 1)$ für $t \neq s$ bzw. $P_{1,ts} \equiv P(c_{1t} = 1) \equiv P_{1t}$ für $t = s$. Außerdem seien die in den jeweiligen Sätzen genannten Annahmen erfüllt.

Beweis von Satz 1:

Teil (1)

Sei $S_{(A-\hat{A})f,(B-\hat{B})\hat{f}} = \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it}(A_{it} - \hat{A}_{it})(B_{it} - \hat{B}_{it})\hat{f}_{it}^2$ mit $\hat{f}_{it} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} c_{js}$,

$\hat{A}_{it} = \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} A_{js} c_{js} / \hat{f}_{it}$, sowie \hat{B}_{it} entsprechend definiert; $\tilde{S}_{(A-\hat{A}_b)f_b,(B-\hat{B}_b)\hat{f}_b}$

$= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (A_{it} - \hat{A}_{it,b})(B_{it} - \hat{B}_{it,b})\hat{f}_{it,b}^2$ mit $\hat{f}_{it,b} = \frac{1}{NT a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js}$ sowie $\hat{A}_{it,b} =$

$\frac{1}{NT a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} A_{js} / \hat{f}_{it,b}$ und $\hat{B}_{it,b}$ entsprechend definiert.

Dann gilt zunächst:

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha}_{UB} - \alpha) = S_{(w-\hat{w})\hat{f},(x-\hat{x})\hat{f}} \sqrt{N} S_{(w-\hat{w})\hat{f},(y-\hat{y})\hat{f}}$$

und

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha} - \alpha) = \tilde{S}_{(w-\hat{w}_b)\hat{f}_b,(x-\hat{x}_b)\hat{f}_b} \sqrt{N} \tilde{S}_{(w-\hat{w}_b)\hat{f}_b,(y-\hat{y}_b)\hat{f}_b}.$$

Li/Stengos (1996) folgend, ist es für den Beweis von Teil (1) des Satzes 1 hinreichend, die Gültigkeit von

$$(1) S_{(w-\hat{w})\hat{f},(x-\hat{x})\hat{f}} = S_{(w-E(w|z))f,(x-E(x|z))f} + o_p(1),$$

$$(2) \sqrt{N} S_{(w-\hat{w})\hat{f},(y-\hat{y})\hat{f}} = \sqrt{N} S_{(w-E(w|z))f,uf} + o_p(1),$$

$$(3) S_{(w-E(w|z))f,(x-E(x|z))f} \xrightarrow{p} B_{UB},$$

$$(4) \sqrt{N} S_{(w-E(w|z))f,uf} \xrightarrow{d} N(0, A_{UB})$$

zu zeigen:

Satz 1.1: $S_{(w-\hat{w})\hat{f},(x-\hat{x})\hat{f}} = S_{(w-E(w|z))f,(x-E(x|z))f} + o_p(1)$ und $\sqrt{N} S_{(w-\hat{w})\hat{f},(y-\hat{y})\hat{f}} = \sqrt{N} S_{(w-E(w|z))f,uf} + o_p(1)$.

Beweis: Aus dem Beweis von Theorem 1, Teil (i) in Li/Stengos (1996) für ein Balanced Panel ist klar, daß Satz 1.1 richtig ist, sofern für alle Summen $S_{(A-\hat{A})\hat{f},(B-\hat{B})\hat{f}}$ und $S_{A(\hat{f}-f),B(\hat{f}-f)}$ gilt, $S_{(A-\hat{A})\hat{f},(B-\hat{B})\hat{f}} = o_p(1)$, falls $\tilde{S}_{(A-\hat{A}_b)\hat{f}_b,(B-\hat{B}_b)\hat{f}_b} = o_p(1)$, und $S_{A(\hat{f}-f),B(\hat{f}-f)} = o_p(1)$, falls $\tilde{S}_{A(\hat{f}_b-f),B(\hat{f}_b-f)} = o_p(1)$. Daß dieses der Fall ist, läßt sich leicht sehen: Zunächst ist

$$\begin{aligned} & S_{(A-\hat{A})\hat{f},(B-\hat{B})\hat{f}} \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left(A_{it} \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} c_{js} - \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N K_{it,js} A_{js} c_{js} \right) \\ & \times \left(B_{it} \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,j's'} c_{j's'} - \frac{1}{\sum_{t=1}^T N_t a^{q_2}} \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,j's'} B_{j's'} c_{j's'} \right) c_{it} \\ &= \left\{ \frac{1}{NT} \frac{1}{(NT a^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) B_{it} c_{js} c_{j's'} c_{it} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) B_{j's'} c_{js} c_{j's'} c_{it} \Big\} \\
& \times \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \\
= & \left\{ \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) (B_{it} - B_{j's'}) c_{js} c_{j's'} c_{it} \right\} \\
& \times \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \tilde{S}_{(A-\hat{A}_b)\hat{f}_b, (B-\hat{B}_b)\hat{f}_b} \\
= & \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) (B_{it} - B_{j's'}).
\end{aligned}$$

Damit gilt wegen

$$\begin{aligned}
& S_{(A-\hat{A})\hat{f}, (B-\hat{B})\hat{f}} \left(\frac{\sum_{t=1}^T N_t}{NT} \right)^2 \\
= & \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) (B_{it} - B_{j's'}) c_{js} c_{j's'} c_{it} \\
\sim & \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N K_{it,js} K_{it,j's'} (A_{it} - A_{js}) (B_{it} - B_{j's'}) \\
= & o_p(1)
\end{aligned}$$

und $\left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \xrightarrow{p} \left(\frac{T}{\sum_{t=1}^T P_{1t}} \right)^2$, aufgrund des Khinchin-Gesetzes der großen Zahlen und des Theorems von Slutsky, auch $S_{(A-\hat{A})\hat{f}, (B-\hat{B})\hat{f}} = o_p(1)$.

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
& S_{A(\hat{f}-f), B(\hat{f}-f)} \\
= & \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N A_{it} B_{it} (\hat{f}_{it} - f_{it})^2 c_{it} \\
= & \left\{ \frac{1}{NT} \frac{1}{(NTa^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N \left\{ A_{it} B_{it} K_{it,js} K_{it,j's'} - 2K_{it,js} f_{it} + f_{it}^2 \right\} c_{it} c_{js} c_{j's'} \right\} \\
& \times \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{A(\hat{f}_b-f), B(\hat{f}_b-f)} \\ &= \frac{1}{NT} \frac{1}{(NT\alpha^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N \left\{ A_{it} B_{it} K_{it,js} K_{it,j's'} - 2K_{it,js} f_{it} + f_{it}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dann folgt wegen

$$\begin{aligned} & S_{A(\hat{f}-f), B(\hat{f}-f)} \left(\frac{\sum_{t=1}^T N_t}{NT} \right)^2 \\ &= \frac{1}{NT} \frac{1}{(NT\alpha^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N \left\{ A_{it} B_{it} K_{it,js} K_{it,j's'} - 2K_{it,js} f_{it} + f_{it}^2 \right\} c_{it} c_{js} c_{j's'} \\ &\sim \frac{1}{NT} \frac{1}{(NT\alpha^{q_2})^2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N \left\{ A_{it} B_{it} K_{it,js} K_{it,j's'} - 2K_{it,js} f_{it} + f_{it}^2 \right\} \\ &= o_p(1) \end{aligned}$$

$$\text{und } \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \xrightarrow{p} \left(\frac{T}{\sum_{t=1}^T P_{1t}} \right)^2 \text{ auch } S_{A(\hat{f}-f), B(\hat{f}-f)} = o_p(1).$$

□

Satz 1.2: $S_{(w-E(w|z))f, (x-E(x|z))f} \xrightarrow{p} B_{UB}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} S_{(w-E(w|z))f, (x-E(x|z))f} &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N c_{it} (w_{it} - E(w_{it} | z_{it})) (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' f_{it}^2 \\ &\xrightarrow{p} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left(c_{1t} (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t}^2 \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} E \left((w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t}^2 \right) \end{aligned}$$

aufgrund Khinchin's Gesetz der großen Zahl.

□

Satz 1.3: $\sqrt{N} S_{(w-E(w|z))f, uf} \xrightarrow{d} N(0, A_{UB})$.

Beweis: Aufgrund des Lindeberg-Levy zentralen Grenzwertsatzes gilt:

$$\sqrt{N} S_{(w-E(w|z))f, uf} \xrightarrow{d} N(E(\eta_1), V(\eta_1))$$

mit $\eta_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c_{1t} (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) u_{1t} f_{1t}^2$, und ferner ist

$$E(\eta_1) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left(c_{1t} (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) u_{1t} f_{1t}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left(c_{1t} (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) E(u_{1t} | w_{1t}, z_{1t}) f_{1t}^2 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
V(\eta_1) &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T E \left(c_{1t} (w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) u_{1t} f_{1t}^2 c_{1s} (w_{1s} - E(w_{1s} | z_{1s}))' u_{1s} f_{1s}^2 \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T P_{1,ts} E \left((w_{1t} - E(w_{1t} | z_{1t})) u_{1t} f_{1t}^2 (w_{1s} - E(w_{1s} | z_{1s}))' u_{1s} f_{1s}^2 \right) .
\end{aligned}$$

□

Teil (2)

$\hat{B}_{UB} \xrightarrow{p} B_{UB}$ folgt direkt aus (1) und (3), und es ist leicht zu sehen, daß $\hat{A}_{UB} \xrightarrow{p} A_{UB}$, da $\hat{A} \rightarrow A$ im Balanced Panel und $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T N_t\right) \xrightarrow{p} \sum_{t=1}^T P_{1t}$ sowie für jede Summe $S = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N \dots A_{it} A_{js} \dots c_{it} c_{js} \dots$ folgt, $S = o_p(1)$, sofern $\tilde{S} = o_p(1)$, da $S \sim \tilde{S}$.

Beweis von Satz 2:

Die Gültigkeit von Satz 2 läßt sich den Beweisen von Lemma A.1 und Proposition 1 in Kniesner/Li (1996) für ein Balanced Panel mit seriell unkorrelierten Störtermen folgend

zeigen: Zunächst gilt mit $C \equiv \frac{1}{Nh^{q_2}} \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für jedes beliebige z :

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(z)_{UB} &= \left\{ C \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K} \left(\frac{z_{it} - z}{h} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ z_{it} - z \end{pmatrix} (1, (z_{it} - z)') c_{it} \right\}^{-1} \\
&\quad \times C \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K} \left(\frac{z_{it} - z}{h} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ z_{it} - z \end{pmatrix} (y_{it} - x'_{it} \hat{\alpha}_{UB}) c_{it} \\
&= \left\{ \frac{1}{Nh^{q_2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K} \left(\frac{z_{it} - z}{h} \right) \begin{pmatrix} h^2 \\ z_{it} - z \end{pmatrix} (1, (z_{it} - z)') c_{it} \right\}^{-1} \\
&\quad \times \frac{1}{Nh^{q_2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K} \left(\frac{z_{it} - z}{h} \right) \begin{pmatrix} h^2 \\ z_{it} - z \end{pmatrix} (y_{it} - x'_{it} \hat{\alpha}_{UB}) c_{it} . \tag{1}
\end{aligned}$$

Ersetzt man in (23) $y_{it} - x'_{it}\hat{\alpha}_{UB}$ aufgrund der Beziehung

$$y_{it} - x'_{it}\hat{\alpha}_{UB} = x'_{it}(\alpha - \hat{\alpha}_{UB}) + \theta(z_{it}) + u_{it}$$

unter Nutzung der Taylorreihenapproximation (4),

$$\theta(z_{it}) = (1, (z_{it} - z)')\delta(z) + R(z_{it}, z),$$

ergibt sich mit $\bar{K}_{it,z} \equiv \bar{K}\left(\frac{z_{it}-z}{h}\right)$:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(z)_{UB} &= \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it} - z} \right) (1, (z_{it} - z)') c_{it} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it} - z} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \{ (1, (z_{it} - z)')\delta(z) + R(z_{it}, z) + u_{it} + x'_{it}(\alpha - \hat{\alpha}_{UB}) \} c_{it} \right\} \\ &= \delta(z) + \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it} - z} \right) (1, (z_{it} - z)') c_{it} \right\}^{-1} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it} - z} \right) \{ R(z_{it}, z) + u_{it} + x'_{it}(\alpha - \hat{\alpha}_{UB}) \} c_{it} \\ &\equiv \delta(z) + (A^{1,z})^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z}) \\ &= \delta(z) + (A^{1,z}/h^2)^{-1} (A^{2,z}/h^2 + A^{3,z}/h^2 + A^{4,z}/h^2). \end{aligned}$$

Damit ist die Erfüllung folgender Voraussetzungen für die Gültigkeit von Satz 2 hinreichend:

- (1) $(A^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} M$,
- (2) $(A^{2,z}/h^2) \xrightarrow{p} 0$,
- (3) $(A^{3,z}/h^2) \xrightarrow{p} 0$,
- (4) $(A^{4,z}/h^2) \xrightarrow{p} 0$.

Satz 2.1: $(A^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \begin{pmatrix} f(z) & 0 \\ \int \bar{K}(\nu)\nu\nu' d\nu \frac{\partial f(z)}{\partial z} & f(z) \int \bar{K}(\nu)\nu\nu' d\nu \end{pmatrix}.$

Beweis: Sei

$$\begin{aligned} A^{1,z} &= \frac{1}{NT h^{q_2}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 c_{it} & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 (z_{it} - z)' c_{it} \\ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} (z_{it} - z) c_{it} & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} (z_{it} - z)(z_{it} - z)' c_{it} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} A_{11}^{1,z} & A_{12}^{1,z} \\ A_{21}^{1,z} & A_{22}^{1,z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$A_b^{1,z} \equiv \frac{1}{NT h^{q_2}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 (z_{it} - z)' \\ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} (z_{it} - z) & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} (z_{it} - z)(z_{it} - z)' \end{pmatrix}$$

im Balanced Panel. Dann gilt $A^{1,z} \sim A_b^{1,z}$ und somit $A^{1,z} = O_p(1)$, da $A_b^{1,z} = O_p(1)$ nach Kniesner/Li (1996). Damit folgt:

$$(A_{11}^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} f(z) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t}, \text{ da}$$

$$\begin{aligned} E(A_{11}^{1,z}/h^2) &= E\left(\frac{1}{T h^{q_2}} \sum_{t=1}^T \bar{K}_{1t,z} c_{1t}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{q_2}} E(\bar{K}_{1t,z}) \\ &= f(z) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} + O(h^2). \end{aligned}$$

$$(A_{21}^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \bar{K}(\nu)\nu\nu' d\nu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t}, \text{ da}$$

$$\begin{aligned} E(A_{21}^{1,z}/h^2) &= E\left(\frac{1}{T h^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \bar{K}_{1t,z} (z_{1t} - z) c_{1t}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h^{q_2+2}} P_{1t} E(\bar{K}_{1t,z} (z_{1t} - z)) \\ &= \frac{\partial f(z)}{\partial z} \int \bar{K}(\nu)\nu\nu' d\nu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} + O(h). \end{aligned}$$

$$(A_{12}^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} 0, \text{ da } (A_{12}^{1,z}/h^2) = (A_{21}^{1,z})' = O_p(h^2).$$

$$(A_{22}^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} f(z) \int \bar{K}(\nu)\nu\nu' d\nu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t}, \text{ da}$$

$$E(A_{22}^{1,z}/h^2) = E\left(\frac{1}{T h^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \bar{K}_{1t,z} (z_{1t} - z)(z_{1t} - z)' c_{1t}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h^{q_2+2}} P_{1t} E(\bar{K}_{1t,z}(z_{1t} - z)(z_{1t} - z)') \\
&= f(z) \int \bar{K}(\nu) \nu \nu' d\nu \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} + O(h).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2: $(A^{2,z}/h^2) \xrightarrow{p} 0$.

Beweis: Zunächst ist

$$A^{2,z}/h^2 = \frac{1}{TNh^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \bar{K}_{it,z} \left(\begin{array}{c} h^2 \\ z_{it} - z \end{array} \right) R(z_{it}, z) c_{it},$$

und im Balanced Panel sei definiert:

$$A_b^{2,z}/h^2 \equiv \frac{1}{TNh^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \bar{K}_{it,z} \left(\begin{array}{c} h^2 \\ z_{it} - z \end{array} \right) R(z_{it}, z).$$

Dann ist $A^{2,z}/h^2 \sim A_b^{2,z}/h^2$ und damit $A^{2,z}/h^2 = O_p(h^2) = o_p(1)$, da $A^{2,z}/h^2 = O_p(h^2) = o_p(1)$ nach Kniesner/Li (1996).

□

Satz 2.3: $A^{3,z}/h^2 \xrightarrow{p} 0$.

Beweis: Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
E(A^{3,z}/h^2) &= E\left(\frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\begin{array}{c} h^2 \\ z_{it} - z \end{array} \right) u_{it} c_{it}\right) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{q_2+2}} E\left(\bar{K}_{it,z} \left(\begin{array}{c} h^2 \\ z_{it} - z \end{array} \right) u_{it}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und ferner, mit $\sigma^2(z_{1t}) \equiv E(u_{1t}^2 | z_{1t})$ und $\rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s}) \equiv E(u_{1t} u_{1s} | z_{1t} z_{1s})$,

$$\begin{aligned}
&V\left(\frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 u_{it} c_{it}\right) \\
&= \frac{1}{N} V\left(\frac{1}{T h^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \bar{K}_{1t,z} h^2 u_{1t} c_{1t}\right) \\
&= \frac{1}{N} E\left(\frac{1}{T^2 h^{2q_2+4}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} h^4 u_{1t} u_{1s} c_{1t} c_{1s}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{NT^2} \left\{ \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{2q_2}} E \left(\bar{K}_{1t,z}^2 \sigma^2(z_{1t}) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \frac{1}{h^{2q_2}} E \left(\bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} \rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s}) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{NT^2} \left\{ \frac{1}{h^{q_2}} \sum_{t=1}^T P_{1t} \int \bar{K}^2(\nu_t) \sigma^2(z + h\nu_t) f(z + h\nu_t) d\nu_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \int \bar{K}(\nu_t) \bar{K}(\nu_s) \rho_{ts}(z + h\nu_t, z + h\nu_s) f(z + h\nu_t, z + h\nu_s) d\nu_t d\nu_s \right\} \\
&= \frac{1}{NT^2} \left(O(h^{-q_2}) + O(1) \right) \\
&= O \left((Nh^{q_2})^{-1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&V \left(\frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} (z_{it} - z) u_{it} c_{it} \right) \\
&= \frac{1}{N} V \left(\frac{1}{T h^{q_2+2}} \sum_{t=1}^T \bar{K}_{1t,z} (z_{1t} - z) u_{1t} c_{1t} \right) \\
&= \frac{1}{N} E \left(\frac{1}{T^2 h^{2q_2+4}} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} (z_{1t} - z)(z_{1s} - z)' u_{1t} u_{1s} c_{1t} c_{1s} \right) \\
&= \frac{1}{NT^2} \left\{ \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{2q_2+4}} E \left(\bar{K}_{1t,z}^2 (z_{1t} - z)(z_{1t} - z)' \sigma^2(z_{1t}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \frac{1}{h^{2q_2+4}} E \left(\bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} (z_{1t} - z)(z_{1s} - z)' \rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s}) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{NT^2} \left\{ \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{q_2+2}} \int \bar{K}^2(\nu_t) \nu_t \nu_t' \sigma^2(z + h\nu_t) f(z + h\nu_t) d\nu_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \frac{1}{h^2} \int \bar{K}(\nu_t) \bar{K}(\nu_s) \nu_t \nu_s' \rho_{ts}(z + h\nu_t, z + h\nu_s) f(z + h\nu_t, z + h\nu_s) d\nu_t d\nu_s \right\} \\
&= \frac{1}{NT^2} \left(O(h^{-(q_2+2)}) + O(1) \right) \\
&= O \left((Nh^{q_2+2})^{-1} \right).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.4: $A^{4,z}/h^2 \xrightarrow{p} 0$.

Beweis: Mit $A_b^{4,z}/h^2 = \frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it}-z} \right) x'_{it}(\alpha - \hat{\alpha}) = O_p(1)O_p(N^{-0.5}) = o_p(1)$ im Balanced Panel (vgl. Kniesner/Li 1996) folgt: $A^{4,z}/h^2 = o_p(1)$, da

$$\frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it}-z} \right) c_{it} x_{it} \sim \frac{1}{NT h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \bar{K}_{it,z} \left(\frac{h^2}{z_{it}-z} \right) x_{it}$$

und $\alpha - \hat{\alpha}_{UB} = O_p(N^{-0.5})$. □

Beweis von Satz 3:

Teil (1)

Zunächst ist

$$D(N) \left(\hat{\delta}(z)_{UB} - \delta(z) \right) = D(N) \left(A^{1,z}/h^2 \right)^{-1} \left(A^{2,z}/h^2 + A^{3,z}/h^2 + A^{4,z}/h^2 \right).$$

Damit ist hinreichend, die Gültigkeit von

- (1) $(A^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} M$,
- (2) $D(N)M^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 = D(N)R_{UB}^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 + o_p(1)$,
- (3) $D(N) (A^{3,z} + A^{2,z} + A^{4,z})/h^2 \rightarrow N(0, \Omega_{UB}) + o_p(1) + o_p(1)$

zu zeigen, was dem Beweis von Kniesner/Li (1996) für ein Balanced Panel mit seriell unkorrelierten Störtermen folgend getan werden kann:

$(A^{1,z}/h^2) \xrightarrow{p} M$ ist nach Satz 2.1 richtig, und ferner gilt:

Satz 3.1: $D(N)M^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 = D(N)R_{UB}^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 + o_p(1)$.

Beweis: Mit $M^{-1} = \begin{pmatrix} \left(f(z) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \right)^{-1} & 0 \\ \left(-f^2(z) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \right)^{-1} \frac{\partial f(z)}{\partial z} & \left(f(z) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_{1t} \int \bar{K}(\nu) \nu \nu' d\nu \right)^{-1} \end{pmatrix}$ ist leicht zu sehen, daß

$$D(N)M^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 = D(N)R_{UB}^{-1} (A^{2,z} + A^{3,z} + A^{4,z})/h^2 + o_p(1),$$

da

$$\begin{aligned}\sqrt{Nh^{q_2+2}}A_1^{2,z}/h^2 &= \sqrt{Nh^{q_2+2}}O_p(h^2) = o_p(1), \\ \sqrt{Nh^{q_2+2}}A_1^{3,z}/h^2 &= \sqrt{Nh^{q_2+2}}O_p\left((Nh^{q_2})^{-1}\right) = o_p(1), \\ \sqrt{Nh^{q_2+2}}A_1^{4,z}/h^2 &= \sqrt{Nh^{q_2+2}}O_p\left(N^{-1/2}\right) = o_p(1),\end{aligned}$$

wobei $A^{2,z} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{2,z} \\ A_2^{2,z} \end{pmatrix}$, $A^{3,z} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{3,z} \\ A_2^{3,z} \end{pmatrix}$ und $A^{4,z} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{4,z} \\ A_2^{4,z} \end{pmatrix}$.

□

Satz 3.2: $D(N)(A^{3,z} + A^{2,z} + A^{4,z})/h^2 \rightarrow N(0, \Omega_{UB}) + o_p(1) + o_p(1)$.

Beweis: Es ist

$$D(N)(A^{3,z}/h^2) \xrightarrow{d} N(0, \Omega_{UB})$$

aufgrund eines Lindeberg-Levy Grenzwerttheorems für trianguläre Felder und

$$E\left(D(N)(A^{3,z}/h^2)\right) = 0, \quad (2)$$

$$V\left(D(N)(A^{3,z}/h^2)\right) = \Omega_{UB}. \quad (3)$$

Die Gültigkeit von (24) ist leicht zu sehen, und (25) ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}& E\left(\left\{\sqrt{Nh^{q_2}}A_1^{3,z}\right\}^2\right) \\ &= E\left(\frac{1}{NT^2h^{q_2+4}}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\sum_{t=1}^T\sum_{s=1}^T\bar{K}_{it,z}\bar{K}_{js,z}h^4u_{it}u_{js}c_{it}c_{js}\right) \\ &= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T P_{1t}\frac{1}{h^{q_2}}E\left(\bar{K}_{1t,z}^2\sigma^2(z_{1t})\right) + \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts}\frac{1}{h^{q_2}}E\left(\bar{K}_{1t,z}\bar{K}_{1s,z}\rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s})\right) \\ &= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T P_{1t}\int\bar{K}^2(\nu_t)\sigma^2(z+h\nu_t)f(z+h\nu_t)d\nu_t \\ &\quad + \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts}h^{q_2}\int\bar{K}(\nu_t)\bar{K}(\nu_s)\rho_{ts}(z+h\nu_t, z+h\nu_s)f(z+h\nu_t, z+h\nu_s)d\nu_t d\nu_s \\ &= \frac{1}{T^2}\left\{\sum_{t=1}^T\left(P_{1t}\sigma^2(z)f(z)\int\bar{K}^2(\nu)d\nu + O(h^2)\right) + \sum_{t=1}^T\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T O(h^{q_2})\right\} \\ &= \sigma^2(z)f(z)\int\bar{K}^2(\nu)d\nu\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^T P_{1t} + o(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \left(\left\{ \sqrt{N h^{q_2+2}} A_2^{3,z} \right\}^2 \right) \\
&= E \left(\frac{1}{N T^2 h^{q_2+2}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \bar{K}_{it,z} \bar{K}_{js,z} (z_{it} - z)(z_{js} - z)' u_{it} u_{js} c_{it} c_{js} \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{q_2+2}} E \left(\bar{K}_{1t,z}^2 (z_{1t} - z)(z_{1t} - z)' \sigma^2(z_{1t}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \frac{1}{h^{q_2+2}} E \left(\bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} (z_{1t} - z)(z_{1s} - z)' \rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s}) \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(P_{1t} \sigma^2(z) f(z) \int \bar{K}^2(\nu) \nu \nu' d\nu + O(h) \right) + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T O(h^{q_2}) \\
&= \sigma^2(z) f(z) \int \bar{K}^2(\nu) \nu \nu' d\nu \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T P_{1t} + o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Cov \left(\sqrt{N h^{q_2}} A_1^{3,w}, \sqrt{N h^{q_2+2}} A_2^{3,w} \right) \\
&= E \left(\sqrt{N h^{q_2}} A_1^{3,w} \sqrt{N h^{q_2+2}} A_2^{3,w} \right) \\
&= E \left(\frac{1}{N T^2 h^{p+3}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \bar{K}_{it,z} h^2 c_{it} u_{it} \bar{K}_{js,z} (z_{js} - z) c_{js} u_{js} \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T P_{1t} \frac{1}{h^{p+1}} E \left(\bar{K}_{1t,z}^2 (z_{1t} - z) \sigma^2(z_{1t}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^T P_{1,ts} \frac{1}{h^{q_2+1}} E \left(\bar{K}_{1t,z} \bar{K}_{1s,z} (z_{1s} - z) \rho_{ts}(z_{1t}, z_{1s}) \right) \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T O(h) + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T O(h^{q_2}) \\
&= O(h) = o(1).
\end{aligned}$$

Ferner gilt $D(N)(A^{2,z}/h^2) = o_p(1)$, da

$$\begin{aligned}
\sqrt{N h^{q_2}} A_1^{2,z} / h^2 &= \sqrt{N h^{q_2}} O_p(h^2) = o_p(1), \\
\sqrt{N h^{q_2+2}} A_2^{2,z} / h^2 &= \sqrt{N h^{q_2+2}} O_p(h) = o_p(1)
\end{aligned}$$

und außerdem

$$D(N)(A^{4,w}/h^2) = o(N^{-1/2}) \cdot O_p(N^{-1/2}) = o_p(1).$$

□

Teil (2)

Da $\hat{R} \xrightarrow{p} R$ und $\hat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$ im Balanced Panel und jede Summe im Unbalanced Panel in Wahrscheinlichkeit von einer Ordnung ist, die höchstens gleich der der entsprechenden Summe im Balanced Panel ist, ist leicht zu sehen, daß $\hat{R}_{UB} = R_{UB} + o_p(1)$ und $\hat{\Omega}_{UB} = \Omega_{UB} + o_p(1)$.

Beweis von Satz 4:

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} J_{POOL,UB} &= \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} c_{it} \left\{ \frac{1}{(N-1)h^p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{u}_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt} c_{jt} \right\} \\ &= \frac{1}{N(N-1)Th^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} \hat{u}_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt}. \end{aligned}$$

Baltagi et al. (1996) folgend, ist es für den Beweis von Proposition 4 hinreichend, die Gültigkeit von

$$(1) J_{POOL,UB} = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right) + J_1,$$

$$(2) Nh^{p/2} J_1 \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma_{POOL,UB}^2)$$

zu zeigen, mit

$$J_1 \equiv \frac{1}{N(N-1)Th^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N u_{it} \hat{f}_{it} u_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt}.$$

Satz 4.1: $J_{POOL,UB} = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right) + J_1$.

Beweis: Sei $\left(\frac{\sum_{t=1}^T N_t}{NT}\right)^2 (J_{POOL,UB} - J_1) \equiv J_2$ und im Balanced Panel $J_{POOL} - J_{1b} \equiv J_{2b}$

mit $J_{1b} \equiv \frac{1}{N(N-1)Th^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N u_{it} \hat{f}_{it} u_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt}$. Aus dem Beweis zu Theorem 1 (i) in Baltagi et al. (1996) ist klar, daß $J_{2b} = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right)$, und daraus folgt: $J_2 = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right)$,

da $J_2 \sim J_{2b}$. Da $\left(\frac{\sum_{t=1}^T N_t}{NT}\right)^2 \xrightarrow{p} \left(\frac{\sum_{t=1}^T P_{1t}}{T}\right)^2$, ist somit $J_{POOL,UB} - J_1 = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right)$. \square

Satz 4.2: $J_1 \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma_{POOL,UB}^2)$.

Beweis: Sei analog zu $J_{N_2} = J_{N_2}U + J_{N_2}R$ (J_{N_2} entspricht J_{1b} im Beweis zu Satz 4.1) in Baltagi et al. (1996) J_1 geschrieben als:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{N(N-1)Th^p} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N u_{it} \hat{f}_{it} u_{jt} \hat{f}_{jt} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt} \\
&= \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \frac{1}{N^3(N-1)T^3 h^p a^{2p}} \\
&\quad \times \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{t'=1}^T \sum_{i'=1}^N \sum_{s'=1}^T \sum_{j'=1}^N u_{it} u_{jt} K_{it,i't'} K_{jt,j's'} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt} c_{i't'} c_{j's'} \\
&\equiv \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \frac{1}{N^3(N-1)T^3 h^p a^{2p}} \\
&\quad \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq i' \neq j'}}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T u_{it} u_{jt} K_{it,i't'} K_{jt,j's'} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt} c_{i't'} c_{j's'} \\
&\quad + J_1 R \\
&\equiv J_1 U + J_1 R.
\end{aligned}$$

Dann ist klar, daß $J_1 R \sim J_{N_2} R$ und somit $J_1 R = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right)$, da $J_{N_2} R = o_p\left((Nh^{p/2})^{-1}\right)$, und für $J_1 U$ folgt analog zu $J_{N_2} U$:

$$\begin{aligned}
J_1 U &= \left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2 \frac{1}{N^3(N-1)T^3 h^p a^{2p}} \binom{N}{4} \\
&\quad \times \left\{ \binom{N}{4}^{-1} \sum_{\substack{i \sum_j \sum_{i'} \sum_{j'} \\ 1 \leq i < j < i' < j' \leq N}} P_N(\mathcal{Z}_i, \mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_l, \mathcal{Z}_k) \right\},
\end{aligned}$$

mit

$$P_N(\mathcal{Z}_i, \mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_l, \mathcal{Z}_k) \equiv \sum_{4!} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T u_{it} u_{jt} K_{it,i't'} K_{jt,j's'} \bar{K}_{it,jt} c_{it} c_{jt} c_{i't'} c_{j's'}.$$

Dabei bezeichnet $\sum_{4!}$ die Summation über alle $4! = 24$ Permutationen von i, j, i', j' .

Weiterhin sei wie in Baltagi et al. (1996) definiert:

$$P_N(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \equiv E(P_N(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4) \mid \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2).$$

Dann ist, Baltagi et al. (1996) folgend,

$$\begin{aligned}
& P_N(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \\
&= 4 \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T u_{1t} u_{2t} \bar{K}_{1t,2t} E(K_{1t,3t'} K_{2t,4s'} \mid \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) c_{1t} c_{2t} E(c_{3t'} c_{4s'} \mid c_{1t}, c_{2t}) \\
&= 4 \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T u_{1t} u_{2t} \bar{K}_{1t,2t} f(v_{1t}) f(v_{2t}) a^{2p} c_{1t} c_{2t} P_{1t'} P_{1s'} + o(1),
\end{aligned}$$

da c_i und v_i unabhängig sind, und ferner

$$E(K_{1t,3t'} K_{2t,4s'} \mid \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) = a^{2p} f(v_{1t}) f(v_{2t}) + o(1)$$

sowie

$$E(c_{3t'} c_{4s'} \mid c_{1t}, c_{2t}) = P_{3t'} P_{4s'} = P_{1t'} P_{1s'}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& E\left(P_N^2(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)\right) \\
&= 16a^{4p} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T \sum_{t''=1}^T \sum_{s''=1}^T \\
&\quad E\left(\sigma^2(v_{1t}) \sigma^2(v_{2t}) \bar{K}_{1t,2t}^2 f^2(v_{1t}) f^2(v_{2t}) c_{1t} c_{2t} P_{1t'} P_{1s'} P_{1t''} P_{1s''} + o(1)\right) \\
&+ 16a^{4p} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T \sum_{t''=1}^T \sum_{t'''=1}^T \sum_{s''=1}^T E\left(\rho(v_{1t}, v_{1t''}) \rho(v_{2t}, v_{2t''}) \bar{K}_{1t,2t} \bar{K}_{1t,2t''} \right. \\
&\quad \left. t'' \neq t \right. \\
&\quad \left. f(v_{1t}) f(v_{1t''}) f(v_{2t}) f(v_{2t''}) c_{1t} c_{2t} c_{1t''} c_{2t''} P_{1t'} P_{1s'} P_{1t''} P_{1s''} + o(1)\right) \\
&= 16a^{4p} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T \sum_{t''=1}^T \sum_{s''=1}^T \\
&\quad E\left(\sigma^2(v_{1t}) \sigma^2(v_{2t}) \bar{K}_{1t,2t}^2 f^2(v_{1t}) f^2(v_{2t}) P_{1t'} P_{1s'} P_{1t''} P_{1s''} + o(1)\right) \tag{4} \\
&+ 16a^{4p} \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{s'=1}^T \sum_{t''=1}^T \sum_{t'''=1}^T \sum_{s''=1}^T E\left(\rho(v_{1t}, v_{1t''}) \rho(v_{2t}, v_{2t''}) \bar{K}_{1t,2t} \bar{K}_{1t,2t''} \right. \\
&\quad \left. t'' \neq t \right. \\
&\quad \left. f(v_{1t}) f(v_{1t''}) f(v_{2t}) f(v_{2t''}) P_{1t} P_{2t} P_{1t'} P_{1s'} P_{1t''} P_{1s''} + o(1)\right) . \tag{5}
\end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß für Summe (26) ($\equiv S_1$) gilt,

$$S_1 = 16a^{4p} h^p \left\{ \sum_{t=1}^T E\left(\sigma^4(v_{1t}) f^5(v_{1t})\right) P_{1t}^2 \int \bar{K}^2(\nu) d\nu \left(\sum_{t=1}^T P_{1t}\right)^4 + o(1) \right\},$$

und für Summe (27) ($\equiv S_2$), $S_2 = O(a^{4p}h^{2p})$ wie im Balanced Panel. Dann folgt wegen

$$\left(\frac{NT}{\sum_{t=1}^T N_t}\right)^2 \xrightarrow{p} \frac{T^2}{(\sum_{t=1}^T P_{1t})^2} \text{ aus Lemma B.4 in Fan/Li (1996):}$$

$$Nh^{p/2}J_1U \xrightarrow{d} N(0, V)$$

mit

$$V = \left(\frac{T}{\sum_{t=1}^T P_{1t}}\right)^4 \binom{N}{4} \frac{1}{N^6(N-1)^2 T^6 h^p a^{4p}} \frac{1}{2} 4^2 3^2 16 a^{4p} h^p \sum_{t=1}^T E\left(\sigma^4(v_{1t}) f^5(v_{1t})\right) P_{1t}^2 \\ \times \int \bar{K}^2(\nu) d\nu \left(\sum_{t=1}^T P_{1t}\right)^4,$$

und da

$$V \rightarrow \frac{2}{T^2} \sum_{t=1}^T E\left(\sigma^4(v_{1t}) f^5(v_{1t})\right) P_{1t}^2 \int \bar{K}^2(\nu) d\nu,$$

$$\text{gilt: } Nh^{p/2}J_1 \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma_{POOL,UB}^2).$$

□

$\hat{\sigma}_{POOL,UB}^2 \xrightarrow{p} \sigma_{POOL}^2$ folgt direkt aus $\hat{\sigma}_{POOL}^2 \xrightarrow{p} \sigma_{POOL}^2$, $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T N_t\right) \xrightarrow{p} \sum_{t=1}^T P_{1t}$ und der Tatsache, daß jede Summe im Unbalanced Panel in Wahrscheinlichkeit eine Ordnung besitzt, die höchstens gleich der der entsprechenden Summe im Balanced Panel ist.

Beweis von Satz 5:

Seien S und \tilde{S} definiert wie im Beweis von Satz 1, so daß

$$\frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it} \hat{f}_{it} \hat{u}_{i,t-1} \hat{f}_{i,t-1} c_{it} c_{i,t-1} = S_{\hat{u}_f, \hat{u}_{-1} f_{-1}} \\ \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \hat{u}_{it,b} \hat{f}_{it,b} \hat{u}_{i,t-1,b} \hat{f}_{i,t-1,b} = \tilde{S}_{\hat{u}_b f_b, \hat{u}_{-1,b} f_{-1,b}}.$$

Dann gilt:

$$\sqrt{NT} J_{SK1,UB} = \sqrt{NT} S_{\hat{u}_f, \hat{u}_{-1} f_{-1}},$$

und dem Beweis von Theorem 3.1 in Li/Hsiao (1996) für ein Balanced Panel folgend, besitzt Satz 5 Gültigkeit, sofern

- (1) $\sqrt{NT}J_{SK1,UB} = \sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} \right) + o_p(1)$,
- (2) $S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} \xrightarrow{p} \Phi_{UB}$ mit $\Phi_{UB} = E \left(S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \right)$,
- (3) $\sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' \Phi_{UB} \right) \xrightarrow{d} N \left(0, \sigma_{IEF,UB}^2 \right)$.

Satz 5.1: $\sqrt{NT}J_{SK1,UB} = \sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} \right) + o_p(1)$.

Beweis: Dem Vorgehen im Beweis von Satz 1.1 folgend, ist aus dem Beweis von Theorem 3.1 in Li/Hsiao (1996) leicht zu sehen, daß

$$\begin{aligned} & \sqrt{NT}J_{SK1,UB} - \sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} \right) \\ & \sim \sqrt{NT}J_{SK1} - \sqrt{NT} \left(\tilde{S}_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha} - \alpha)' \tilde{S}_{(x-\hat{x}_b)f_b,u_{-1}f_{-1,b}} \right), \end{aligned}$$

da $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T N_t \right) \xrightarrow{p} \sum_{t=1}^T P_{1t}$ und somit immer $S \sim \tilde{S}$. Die Gültigkeit von Satz 5.1 folgt dann aus $\sqrt{NT}J_{SK1} - \sqrt{NT} \left(\tilde{S}_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha} - \alpha)' \tilde{S}_{(x-\hat{x}_b)f_b,u_{-1}f_{-1,b}} \right) = o_p(1)$. □

Satz 5.2: $S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} \xrightarrow{p} \Phi_{UB}$.

Beweis: Zunächst gilt, $S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} = S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} + o_p(1)$, da $\tilde{S}_{(x-\hat{x}_b)f_b,u_{-1}f_{-1,b}} - \tilde{S}_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} = o_p(1)$ im Balanced Panel (vgl. Li/Hsiao 1996) und offensichtlich $S_{(x-\hat{x})f,u_{-1}f_{-1}} - S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \sim \tilde{S}_{(x-\hat{x}_b)f_b,u_{-1}f_{-1,b}} - \tilde{S}_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}}$. Ferner ist definitionsgemäß $E \left(S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \right) = \Phi_{UB}$, und $V \left(S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \right) = o(1)$ folgt aus $V \left(\tilde{S}_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \right) = o(1)$, da $S_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}} \sim \tilde{S}_{(x-E(x|z))f,u_{-1}f_{-1}}$. □

Satz 5.3: $\sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' \Phi_{UB} \right) \xrightarrow{d} N \left(0, \sigma_{IEF,UB}^2 \right)$.

Beweis: Zunächst folgt aus dem Beweis von Satz 1:

$$\sqrt{NT}(\hat{\alpha}_{UB} - \alpha) \xrightarrow{d} B_{UB}^{-1} \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - E(x_{it} | z_{it})) u_{it} f_{it}^2 c_{it}.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' \Phi_{UB} \right) \\ & \xrightarrow{d} \sqrt{NT} \left(S_{uf,u_{-1}f_{-1}} - \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' u_{it} f_{it}^2 c_{it} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right). \end{aligned}$$

Aus dem Lindeberg-Levi zentralen Grenzwertsatz ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{NT} \left(S_{uf, u_{-1}f_{-1}} - \frac{1}{NT} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' u_{it} f_{it}^2 c_{it} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N u_{it} f_{it} u_{i,t-1} f_{i,t-1} c_{it} c_{i,t-1} - (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' u_{it} f_{it}^2 c_{it} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \\
&\xrightarrow{d} N(E(\eta_1), V(\eta_1))
\end{aligned}$$

mit $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T u_{1t} f_{1t} u_{1,t-1} f_{1,t-1} c_{1t} c_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' u_{1t} f_{1t}^2 c_{1t} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB}$.
Ferner gilt unter $H_0^{SK1/IEF}$:

$$\begin{aligned}
E(\eta_1) &= E \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T u_{1t} f_{1t} u_{1,t-1} f_{1,t-1} c_{1t} c_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' u_{1t} f_{1t}^2 c_{1t} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\eta_1) &= E \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \left\{ u_{1t} f_{1t} u_{1,t-1} f_{1,t-1} c_{1t} c_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' u_{1t} f_{1t}^2 c_{1t} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left\{ u_{1s} f_{1s} u_{1,s-1} f_{1,s-1} c_{1s} c_{1,s-1} - (x_{1s} - E(x_{1s} | z_{1s}))' u_{1s} f_{1s}^2 c_{1s} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right\} \right) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E \left(u_{1t}^2 f_{1t}^2 c_{1t} \left\{ u_{1,t-1} f_{1,t-1} c_{1,t-1} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B_{UB}^{-1})' \Phi_{UB} \right\}^2 \right) \\
&= \sigma_{SK1, UB}^2.
\end{aligned}$$

□

Die Konsistenz von $\hat{\sigma}_{SK1, UB}^2$ bzgl. $\sigma_{SK1, UB}^2$ folgt wieder direkt aus $\hat{\sigma}_{SK1}^2 \xrightarrow{p} \sigma_{SK1}^2$ im Balanced Panel, $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^T N_t \right) \xrightarrow{p} \sum_{t=1}^T P_{1t}$ und der Tatsache, daß für jede Summe S gilt, $S \sim \tilde{S}$.

Beweis von Satz 6

Aus den Beweis von Theorem 3.1 in Li/Hsiao (1996) und von Satz 5 oben ist leicht zu sehen, daß

$$\begin{aligned}
\sqrt{NT(T-1)/2} J_{IEF, UB} &= \frac{1}{\sqrt{NT(T-1)/2}} \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N u_{it} f_{it} u_{is} f_{is} c_{is} c_{it} \right. \\
&\quad \left. - (\hat{\alpha}_{UB} - \alpha)' \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it}) \hat{f}_{it} u_{is} \hat{f}_{is} c_{it} c_{is} \right\} + o_p(1),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{NT(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N (x_{it} - \hat{x}_{it}) \hat{f}_{it} u_{is} \hat{f}_{is} c_{it} c_{is} \\ \xrightarrow{p} & \frac{1}{T(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T E((x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t})) f_{1t} u_{1s} f_{1s} c_{1t} c_{1s}) \equiv \tilde{\Phi}_{UB}. \end{aligned}$$

Damit folgt nach dem Lindeberg-Levy zentralen Grenzwertsatz:

$$\begin{aligned} & \sqrt{NT(T-1)/2} J_{IEF,UB} \\ \xrightarrow{d} & \frac{1}{\sqrt{NT(T-1)/2}} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{i=1}^N u_{it} f_{it} u_{is} f_{is} c_{is} c_{it} - (x_{it} - E(x_{it} | z_{it}))' u_{it} f_{it}^2 c_{it} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \\ \xrightarrow{d} & N(E(\tilde{\eta}_1), V(\tilde{\eta}_1)) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{T(T-1)/2}} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T u_{1t} f_{1t} u_{1s} f_{1s} c_{1t} c_{1s} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' u_{1t} f_{1t}^2 c_{1t} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB}.$$

Unter $H_0^{SK1/IEF}$ gilt:

$$\begin{aligned} E(\tilde{\eta}_1) &= 0 \\ V(\tilde{\eta}_1) &= \frac{1}{T(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{t'=1}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t'}}^T \\ & E \left(u_{1t} f_{1t} c_{1t} \left\{ u_{1s} f_{1s} c_{1s} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times u_{1t'} f_{1t'} c_{1t'} \left\{ u_{1s'} f_{1s'} c_{1s'} - (x_{1t'} - E(x_{1t'} | z_{1t'}))' f_{1t'} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{T(T-1)/2} \sum_{t=1}^T \sum_{\substack{s=1 \\ s < t}}^T \sum_{\substack{s'=1 \\ s' < t}}^T E \left(u_{1t}^2 f_{1t}^2 c_{1t} \left\{ u_{1s} f_{1s} c_{1s} - (x_{1t} - E(x_{1t} | z_{1t}))' f_{1t} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ u_{1s'} f_{1s'} c_{1s'} - (x_{1t'} - E(x_{1t'} | z_{1t'}))' f_{1t'} (B_{UB}^{-1})' \tilde{\Phi}_{UB} \right\} \right). \end{aligned}$$

□

Es ist jetzt wieder leicht zu sehen, daß $\hat{\sigma}_{IEF,UB}^2 \xrightarrow{p} \sigma_{IEF,UB}^2$.