

Linearisierungsverfahren für Standortplanungsprobleme mit nichtlinearen Transportkosten

Raik Stolletz* und Lars Stolletz†

12. Februar 2008

Zusammenfassung

Dieser Aufsatz analysiert das Standortplanungsproblem in der Ebene mit stückweise linearen bzw. stückweise konstanten Transportkosten, die an praxisrelevante Frachtsatztabellen angelehnt sind. Für diese nicht-differenzierbaren Transportkostenfunktionen werden einstufige und dynamische Verfahren der Linearisierung vorgestellt, die auf Durchschnitts- und Grenzkostenapproximationen basieren. Diese Verfahren werden in einer umfangreichen numerischen Untersuchung mit Ergebnissen verglichen, die sich durch Approximationen der Transportkostenfunktionen mittels linearer und geometrischer Regression ergeben. Die numerischen Untersuchungen zeigen, dass die dynamischen Linearisierungen sehr gute Resultate liefern, wobei die relative Abweichung von den minimalen Transportkosten von der Anzahl betrachteter Abnehmerorte und der jeweils verwendeten Initialisierung abhängt.

Abstract

This paper analyzes the Steiner-Weber-Problem with piecewise linear or piecewise constant transportation costs. These non-differentiable cost functions are analyzed using different one-step and dynamic linearization methods, which are based on approximations via average and marginal costs. An extensive numerical study compares these approaches with solutions based on linear and geometric regressions of the cost functions. In the numerical examples the dynamic linearization approaches give results near the optimal solutions. The relative deviations of the transportation costs of the approximated solutions to the minimal costs depend on the initialization of the dynamic approaches and improve as the number of demand points increases.

Schlüsselwörter: Steiner-Weber-Problem; Standortplanung in der Ebene; stückweise lineare Transportkosten; Linearisierung; Dynamic Slope Scaling

*Leibniz Universität Hannover, Institut für Produktionswirtschaft, Königsworther Platz 1, 30167 Hannover, raik.stolletz@prod.uni-hannover.de

†4flow AG, Hallerstr. 1, 10587 Berlin, l.stolletz@4flow.de

1 Einleitung

Das klassische Steiner-Weber-Problem betrachtet die Bestimmung eines transportkostenminimalen Standortes in der euklidischen Ebene, von dem aus eine gegebene Anzahl an Kundenorten oder Abnehmerzentren beliefert wird (vergleiche z.B. Drezner et al. (2002)). Im Steiner-Weber-Problem in seiner ursprünglichen Form werden entfernungsunabhängige Transportkostensätze je Mengen- und Entfernungseinheit unterstellt, so dass sich für jeden Abnehmerort eine von der Entfernung *linear abhängige Transportkostenfunktion* ergibt, vergleiche Abbildung 1. Eine iterative Lösungsmethode steht mit dem Verfahren von Weiszfeld (1937) bzw. dessen Modifikation (Hyperboloid-Approximation) zur Verfügung (vergleiche Domschke und Drexl (1996)). Die Anwendungen und Erweiterungen des Steiner-Weber-Problems in der betrieblichen Planung sind vielfältig, vergleiche z.B. Eiselt (1992), und werden in der wissenschaftlichen Literatur intensiv diskutiert, siehe die ausführlichen Überblicksdarstellungen in Wesolowsky (1993), Plastria (1993), Drezner et al. (2002) und Hale und Moberg (2003).

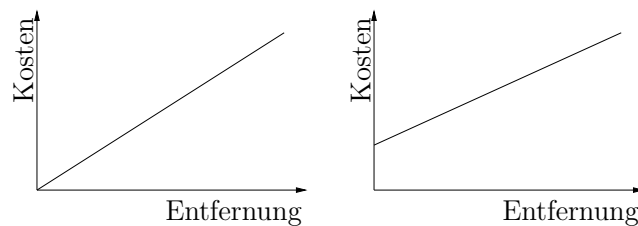


Abbildung 1: Lineare und affin lineare Transportkostenfunktion

Die im klassischen Steiner-Weber-Problem unterstellten entfernungsunabhängigen Transportkostensätze bilden jedoch reale Entscheidungssituationen nur ungenau ab, da mit diesen z.B. keine Größendegressionseffekte (Economies of Scale) modellierbar sind.¹

Solche Effekte lassen sich z.B. durch die Verwendung geeigneter nichtlinearer Transportkostenfunktionen modellieren. Nichtlineare, jedoch *stetige und differenzierbare Kostenfunktionen* werden z.B. in Cooper (1968), Bloech (1970) und Tempelmeier (1980) analysiert. Dabei muss die Transportkostenfunktion weder konvex noch konkav sein, vergleiche die in Abbildung 2 skizzierten Kostenfunktionen. Die Differenzierbarkeit ermöglicht zwar die Anwendung des iterativen Weiszfeld-Verfahrens, jedoch kann dieses abhängig vom gewählten Startpunkt in ein lokales Optimum konvergieren, vergleiche z.B. Tempelmeier (1980). Für nichtlineare *stetige Kostenfunktionen* analysieren

¹Vergleiche z.B. Fleischmann (1993) und die Diskussion nichtkonvexer Zielfunktionen in Domschke (1997).

Hansen et al. (1985) und Drezner und Suzuki (2004) geometrische Branch & Bound-Verfahren.

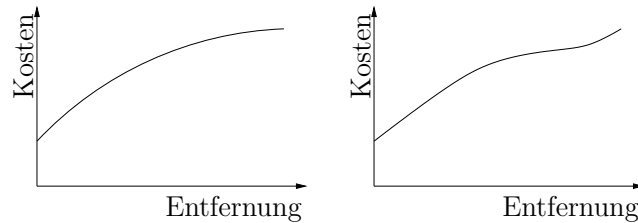


Abbildung 2: Stetige und differenzierbare Transportkostenfunktionen

In der Praxis werden häufig die in Abbildung 3 skizzierten *stückweise linearen oder stückweise konstanten Transportkostenfunktionen* unterstellt. Für verschiedene Entfernungsintervalle liegen somit jeweils konstante Transportkostensätze vor. Dieser Kostenstruktur folgen z.B. auch der Reichkraftwagen- und der Güterfernverkehrstarif, der bis 1994 in Deutschland galt und seitdem Empfehlungscharakter besitzt (siehe Fleischmann (1993), Cardeneo (2003) und o.V. (2007)). Für diese unstetigen bzw. nicht-differenzierbaren Transportkostenfunktionen können die oben erwähnten Verfahren nicht direkt angewandt werden. Tempelmeier (1980) beschreibt, dass aus Frachtsatztabellen mittels Regressionsrechnung stetige und differenzierbare Kostenfunktionen abgeleitet werden können, so dass das Weiszfeld-Verfahren anwendbar ist. Eine direkte Berücksichtigung stückweise linearer oder stückweise konstanter Transportkostenfunktionen wird in der wissenschaftlichen Literatur nicht explizit diskutiert.

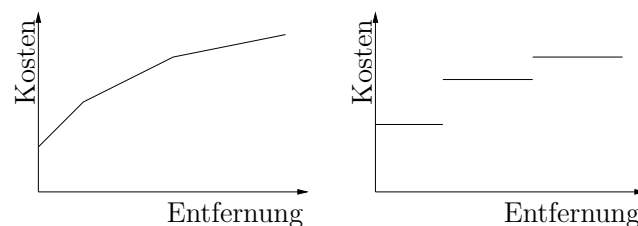


Abbildung 3: Stückweise lineare und stückweise konstante Transportkostenfunktionen

Im vorliegenden Aufsatz wird für stückweise lineare bzw. stückweise konstante Transportkostenfunktionen gezeigt, dass die Lösungen dieses Standortplanungsproblems mit dem in der Praxis häufig zu beobachtenden Ansatz linearisierter Transportkosten deutlich vom Optimum abweicht. Um stückweise lineare bzw. stückweise konstante Transportkostenfunktionen zu berücksichtigen, werden verschiedene Verfahren der dynamischen Linearisierung entwickelt und deren Ergebnisse numerisch mit den Ergebnissen der linearen und geometrischen Regression verglichen.

Der Aufsatz gliedert sich folgendermaßen: Im zweiten Kapitel wird das untersuchte Steiner-Weber-Problem mit stückweise linearen bzw. stückweise konstanten Transportkostenfunktionen formal beschrieben und ein Entscheidungsmodell aufgestellt. Die Lösung des Spezialfalls von Transportkostenfunktionen, die aus einem entfernungsunabhängigen Bestandteil und aus einer linearen Funktion der Entfernung zusammengesetzt sind (affin lineare Transportkostenfunktion im rechten Teil der Abbildung 1), wird auf die Lösung des klassischen Steiner-Weber-Problems (linker Teil der Abbildung 1) zurückgeführt. Verschiedene Linearisierungsansätze für stückweise lineare und stückweise konstante Transportkostenfunktionen werden in Kapitel 3 herausgearbeitet. Neben der Linearisierung mit der einstufigen Durchschnittskostenapproximation, bei der eine lineare Transportkostenfunktion die nichtlineare Funktion approximiert, werden verschiedene iterative Verfahren der dynamischen Linearisierung entwickelt, die auf Durchschnitts- oder Grenzkostenapproximationen basieren. In Kapitel 4 werden die Ergebnisse der Linearisierungsverfahren in einer umfangreichen numerischen Analyse mit Ergebnissen verglichen, die sich durch Approximationen der einzelnen Transportkostenfunktionen mittels linearer und geometrischer Regression ergeben. Einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen der diskutierten Ansätze gibt Kapitel 5.

2 Problembeschreibung und Modellformulierung

2.1 Beschreibung der Transportkostenfunktion

Für das Steiner-Weber-Problem sind $i = 1, \dots, n$ Kundenorte oder Abnehmerzentren mit euklidischen Koordinaten (x_i, y_i) und dem jeweiligen Bedarf w_i gegeben. Gesucht ist ein diese n Abnehmerorte beliefernder transportkostenminimaler Standort (x, y) in der euklidischen Ebene. Im klassischen Steiner-Weber-Problem ergibt sich mit dem Transportkostensatz p (je Mengen- und Entfernungseinheit) bei euklidischer Entfernungsmessung die Zielfunktion

$$\text{Minimiere } \sum_{i=1}^n p \cdot w_i \cdot \text{dist}_i = \sum_{i=1}^n p \cdot w_i \cdot \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (1)$$

Diese für jeden Standort i von der Entfernung dist_i linear abhängige Transportkostenfunktion wird in diesem Aufsatz durch eine realitätsnähere stückweise lineare bzw. stückweise konstante Transportkostenfunktion ersetzt, deren Struktur mit dem Güterfernverkehrstarif vergleichbar ist. Der numerischen Untersuchung in diesem Aufsatz liegt eine Frachtsatztablette zu Grunde, die im Rahmen des ILIPT-Projektes (www.ilipt.org) ermittelt wurde und auf Praxiserfahrung der 4flow AG basiert. Dieser Tarif berücksichtigt so genannte Teilladungen,

bei denen nicht die gesamte Ladekapazität eines LKWs für einen Abnehmerort benötigt wird (LTL: less than truck load), so dass sich für verschiedene Transportvolumina die in Abbildung 4 dargestellten Treppenfunktionen ergeben. Für alle 22 Klassen von Transportvolumina sind die Transportkosten in Tabelle 5 im Anhang zusammengestellt.

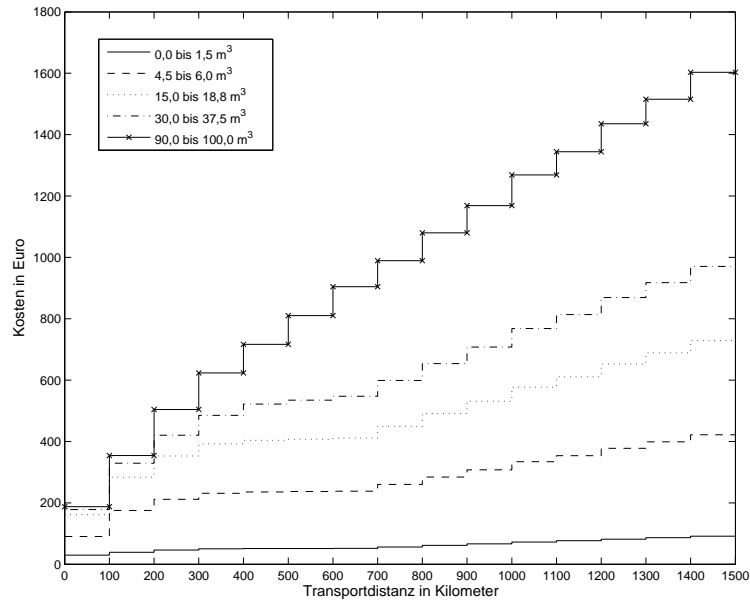


Abbildung 4: Ausgewählte Transportkostenfunktionen

Die zu minimierende Gesamtkostenfunktion $c(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i(x, y)$ in Abhängigkeit der (x, y) -Koordinaten des gesuchten Standortes ist in diesem Fall eine Summe aus Treppenfunktionen, die kein eindeutiges Minimum besitzen muss. Abbildung 5 zeigt die Höhe der gesamten Transportkosten in Abhängigkeit der (x, y) -Koordinaten des gesuchten Standortes eines Beispiels mit fünf Nachfrageorten $(0, 0)$, $(0, 700)$, $(700, 0)$, $(700, 700)$ und $(1, 591)$ und jeweiligen Bedarfen bis 1.5 m^3 . Auf Grund der unterstellten Treppenfunktionen ergeben sich verschiedene *Isokostenflächen* als Tableaus mit identischen Kostenwerten, an deren Rändern die Transportkostenfunktion nicht stetig und somit nicht differenzierbar ist.

2.2 Formulierung als Entscheidungsmodell

In diesem Abschnitt wird ein nichtlineares gemischt-ganzzahliges Entscheidungsmodell für das Steiner-Weber-Problem mit stückweise linearen bzw. stückweise konstanten Transportkostenfunktionen aufgestellt. Dazu wird die Modellierung des Warehouse-Location-Problems mit transportleistungsabhängigen Öffnungskosten aus Holmberg und Ling (1997) auf die Modellierung stückweise linearer bzw. stückweise konstanter Transportkostenfunktionen übertragen.

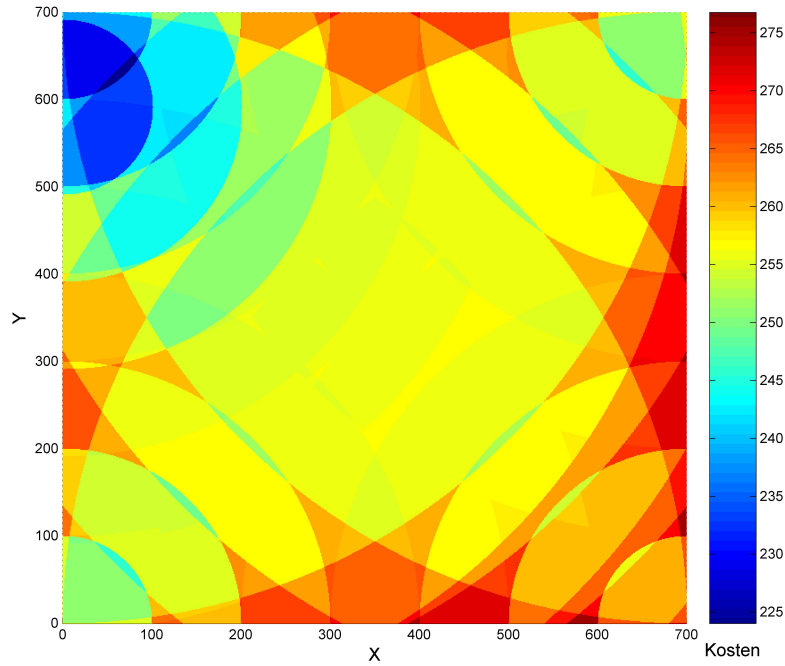


Abbildung 5: Isokostenflächen der Gesamtkostenfunktion

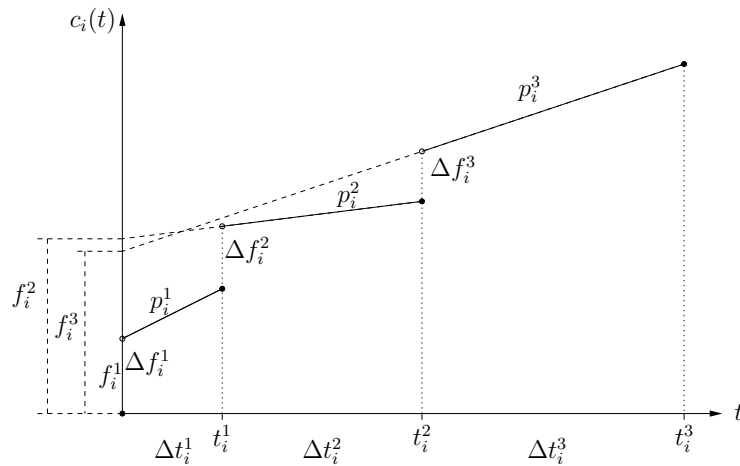


Abbildung 6: Entfernungsabhängige stückweise lineare Transportkostenfunktion für einen Abnehmerort i (in Anlehnung an Holmberg und Ling (1997))

Eine allgemeine stückweise lineare und nicht stetige Transportkostenfunktion $c_i(t)$ für einen Abnehmerort i bei gegebener Nachfrage w_i in Abhängigkeit der Entfernung t vom neu einzurichtenden Standort zeigt Abbildung 6. Diese Transportkostenfunktion lässt sich so für $l = 1, \dots, L$ Entfernungsintervalle zerlegen, dass diese in jedem Intervall linear verläuft. Die Länge des l -ten Intervalls $(t_i^{l-1}, t_i^l]$ sei mit $\Delta t_i^l = t_i^l - t_i^{l-1}$ bezeichnet, wobei $t_i^0 = 0$ gilt. Für eine Entfernung $t \in (t_i^{l-1}, t_i^l]$ innerhalb des l -ten Intervalls lässt sich die Trans-

portkostenfunktion als lineare Funktion mit Fixkostenteil f_i^l und Anstieg p_i^l ausdrücken, also $c_i(t) = f_i^l + p_i^l \cdot t$ für $t \in (t_i^{l-1}, t_i^l]$. Für reine Treppenfunktionen wird der Anstieg Null gesetzt.

Um das Entscheidungsmodell formal aufzustellen, wird im Folgenden eine Zerlegung der Kostenfunktion beschrieben, die für jedes Entfernungsintervall die Änderungen des Kostenfunktionswertes aufsummiert. Dazu sei Δf_i^l die Höhe des Sprunges der Transportkosten beim Erreichen des Intervalls l . Diese beträgt $\Delta f_i^l = f_i^l - f_i^{l-1} + (p_i^l - p_i^{l-1})t_i^{l-1}$, wobei für das erste Intervall $\Delta f_i^1 = f_i^1$ gilt. Im Folgenden sei $dist_i$ die euklidische Entfernung des gesuchten Standortes (x, y) zum Nachfrageort (x_i, y_i) und d_i^l die dabei im l -ten Intervall zurückgelegte Entfernung. Liegt die Entfernung $dist_i$ innerhalb des \bar{l} -ten Intervalls, so beträgt $d_i^{\bar{l}}$ gerade $dist_i - t_i^{\bar{l}-1}$. Für alle davor liegenden Intervalle $l < \bar{l}$ entspricht d_i^l der Intervalllänge Δt_i^l . Die Binärvariable δ_i^l nimmt den Wert 1 an, wenn die Distanz $dist_i$ in das Intervall l hineinragt und Null anderenfalls. Damit ist δ_i^l genau dann Null, wenn d_i^l Null ist und sonst Eins. Mit diesen Parametern und Variablen ergibt sich der Wert der Kostenfunktion $c_i(dist_i)$ für den Nachfrageort i bei gegebener Entfernung $dist_i$ zu

$$c_i(dist_i) = \sum_{l=1}^L (d_i^l p_i^l + \Delta f_i^l \delta_i^l). \quad (2)$$

Dies führt zum Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere } \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^L (d_i^l p_i^l + \Delta f_i^l \delta_i^l) \quad (3)$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = \sum_{l=1}^L d_i^l \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$d_i^l \leq \Delta t_i^l \delta_i^l \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (5)$$

$$d_i^{l-1} \geq \Delta t_i^{l-1} \delta_i^l \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (6)$$

$$\delta_i^l \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (7)$$

$$x, y, d_i^l \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (8)$$

Gleichung (4) fordert für jeden Abnehmerort i , dass die Summe der in den einzelnen Intervallen zurückgelegten Entfernungen der euklidischen Gesamtdistanz entspricht. Die Ungleichungen (5) erzwingen, dass d_i^l nicht größer sein darf als die dazugehörige Intervalllänge. Die Ungleichungen (6) bewirken, dass die Distanz des $(l-1)$ -ten Intervalls mindestens so groß ist wie die Intervalllänge, wenn das darauf folgende Intervall l genutzt wird. Wird das l -te Intervall genutzt, so folgt durch Ungleichungen (5) und (6) für das

Vorgängerintervall $d_i^{l-1} = \Delta t_i^{l-1}$. Die Kombination der beiden Ungleichungen zwingt die binären Entscheidungsvariablen δ_i^l für benutzte Intervalle l auf den Wert 1.

Damit stellt das Steiner-Weber-Problem mit stückweise linearen bzw. stückweise konstanten Transportkosten ein gemischt-ganzzahliges nichtlineares Optimierungsproblem dar, für welches keine allgemeinen Verfahren zur exakten analytischen Lösung zur Verfügung stehen.

2.3 Lösung für lineare Kostenverläufe mit entfernungsunabhängigen Kosten

Die in den folgenden Abschnitten diskutierten Linearisierungsansätze können zu linearen Transportkostenfunktionen mit entfernungsunabhängigen Kosten führen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie dieser Spezialfall auf das klassische Steiner-Weber-Problem zurückgeführt werden kann. Dabei lassen sich zwei in der Praxis zu beobachtende Fälle der Berücksichtigung entfernungsunabhängiger Kosten bei einer Entfernung von $t = 0$ unterscheiden:

- (i) Entfernungsunabhängige Kosten fallen immer an, es gilt somit

$$c_i(t) = f_i^1 + p_i t \quad \text{für } t \geq 0. \quad (9)$$

Dieser Fall lässt sich z.B. beobachten, wenn unabhängig von den Standortkoordinaten Kosten anfallen. Da diese Kosten an allen Abnehmerorten unabhängig von der Wahl des neuen Standortes anfallen, sind sie für die Standortentscheidung irrelevant. Solche Standortprobleme können direkt mit den bekannten Verfahren des klassischen Steiner-Weber-Problems gelöst werden, indem die entfernungsunabhängigen Kosten zur Entscheidungsfindung nicht herangezogen werden.

- (ii) Entfernungsunabhängige Kosten fallen nur an, falls der Standort mit dem Abnehmerort nicht identisch ist, also

$$c_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ f_i^1 + p_i t & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

gilt. Dieser Fall stimmt mit der Definition der allgemeinen Kostenfunktion in Abschnitt 2.2 überein und die entfernungsunabhängigen Kosten sind entscheidungsrelevant. Bei sonst gleichen Annahmen unterscheiden sich die Zielfunktionswerte einer Lösung für Fall (i) und (ii) nur dann, wenn der Standort an einem Abnehmerort liegt. Daher wird der Lösungsraum so zerlegt, dass die Abnehmerorte als potenzielle Standorte separat betrachtet werden. Im ersten Schritt wird dazu das Standortproblem wie in Fall (i) ohne entfernungsunabhängige Kosten gelöst. Da in dieser

Lösung die entfernungsunabhängigen Kosten irrelevant für die Standortentscheidung sind, werden im zweiten Schritt diejenigen Lösungen untersucht, bei denen der Standort mit einem Abnehmerort übereinstimmt. Gilt für den gesuchten Standort $(x, y) = (x_i, y_i)$, so fallen für den i -ten Abnehmerort keine entfernungsunabhängigen Kosten an, für alle anderen Abnehmerorte müssen sie jedoch berücksichtigt werden.

Somit kann die Lösung des Steiner-Weber-Problems mit linearen und entfernungsunabhängigen Transportkosten auf die Lösung des klassischen Steiner-Weber-Problems reduziert werden. Für die in diesem Aufsatz verwendeten Transportkostenfunktionen aus Tabelle 5 im Anhang wird davon ausgegangen, dass die entfernungsunabhängigen Kosten wie in Fall (i) immer anfallen.

3 Linearisierungsverfahren und Regressionsansätze

3.1 Einstufige Durchschnittskostenapproximation

Ein in der Praxis häufig zu beobachtender Ansatz zur Lösung des Steiner-Weber-Problems mit stückweise linearen oder stückweise konstanten Transportkosten besteht darin, diese durch eine lineare Transportkostenfunktion zu approximieren und das daraus resultierende allgemeine Steiner-Weber-Problem über die bekannten Standardverfahren zu lösen.

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Linearisierung der entfernungsabhängigen Transportkosten werden an dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Beispiel mit fünf Nachfrageorten erläutert. Ein Minimum der Kostenfunktion $c(x, y) = \sum_{i=1}^5 c_i(x, y)$ in Abhängigkeit der (x, y) -Koordinaten des gesuchten Standortes kann durch eine aufwendige Enumeration aller Punkte auf einem feinen Gitter in der Ebene angenähert werden (Gitter-Lösung). In dem Beispiel liegt die Lösung für 1000×1000 Gitterpunkte bei $(x^{Grid}, y^{Grid}) = (49, 616)$ mit einem Zielfunktionswert von $c(x^{Grid}, y^{Grid}) = 223.6$.

Bei der **einstufigen Durchschnittskostenapproximation** (Sekantenapproximation) werden die Transportkosten linear approximiert (vergleiche Schildt (1994)). Die linearisierte Transportkostenfunktion $c_i^{DK}(t)$ ist durch die Gerade zwischen den Kosten der Stelle $t = 0$, also den entfernungsunabhängigen Kosten f_i^1 , und den Kosten der maximal möglichen Entfernung t_i^L zwischen dem Nachfragestandort i und dem neu einzurichtenden Standort bestimmt, also²

$$c_i^{DK}(t) = f_i + p_i^{DK}t = \Delta f_i^1 + \frac{f_i^L + p_i^L t_i^L - f_i^1}{t_i^L} t. \quad (11)$$

²Die maximale Entfernung eines Abnehmerortes i zum gesuchten Standort ergibt sich aus der maximalen Entfernung zwischen dem Abnehmerort i und allen anderen Abnehmerorten.

Mit den linearisierten Kostenfunktionen ergibt sich ein Steiner-Weber-Problem mit entfernungsunabhängigen Kosten für $t = 0$, welches auf die Lösung des klassischen Steiner-Weber-Problems zurückgeführt werden kann, siehe Fall (i) in Abschnitt 2.3.

Auf Grund unterschiedlicher Maximalentfernungen ergeben sich im Beispiel für die Standorte $i = 1, \dots, 4$ die Kostensätze $p_i^{DK} = 0.0374$ und für den Standort $i = 5$ der Kostensatz $p_5^{DK} = 0.0405$. Die Anwendung des Weiszfeld-Verfahrens führt zum Standort $(x^{DK}, y^{DK}) = (113.39, 527.84)$ mit einem Zielfunktionswert von 85.55 ohne Berücksichtigung der entfernungsunabhängigen Kosten. Zusammen mit den entfernungsunabhängigen Kosten von 29.52 für jeden Abnehmerort ergeben sich Kosten in Höhe von 233.20. Auf Basis der unterstellten Frachtsatztablelle ergeben sich für den so ermittelten Standort (x^{DK}, y^{DK}) Transportkosten in Höhe von $c(x^{DK}, y^{DK}) = 244.55$.

Neben reinen Treppenfunktionen kann die Durchschnittskostenapproximation auch auf allgemeine stückweise lineare Transportkostenfunktionen angewandt werden.

3.2 Dynamische Durchschnitts- und Grenzkostenapproximationen

In diesem Abschnitt werden zwei iterative Verfahren der dynamischen Linearisierung zur Lösung des Steiner-Weber-Problems mit stückweise linearen Transportkosten vorgestellt, die an das Dynamic-Slope-Scaling-Verfahren angelehnt sind. Dieses Verfahren wird zur Lösung von Netzwerkflussproblemen genutzt, bei denen die Kosten des Flusses auf den Kanten affin linear von deren Höhe abhängen (siehe Kim und Pardalos (2000)). Bei der dynamischen Linearisierung werden iterativ aus einer vorhandenen Lösung Transportkostensätze bestimmt und das allgemeine Steiner-Weber-Problem mit diesen linearen Transportkosten gelöst. Mit den so erhaltenen Entfernungen der Abnehmerorte zum derzeitigen Lösungsort werden wiederum neue Transportkostensätze bestimmt, mit denen das klassische Steiner-Weber-Problem erneut gelöst wird. Im Folgenden werden zwei Ansätze zur iterativen Ermittlung dieser Transportkostensätze analysiert, die auf der Durchschnitts- und der Grenzkostenapproximation basieren.

Dynamische Durchschnittskostenapproximation (DDK)

- (i) *Initialisierung*: Das Verfahren beginnt mit einem initialen Transportkostensatz $p_{i,0}^{DDK}$, der sich durch die einstufige Durchschnittskostenapproximation aus Gleichung (11) ergibt, also $p_{i,0}^{DDK} = p_i^{DK}$.
- (ii) *Aktualisierung der Transportkostensätze*: In jeder Iteration $r = 0, 1, 2, \dots$ wird ausgehend vom aktuellen Transportkostensatz $p_{i,r}^{DDK}$ das klassische

Steiner-Weber-Problem gelöst. Für die Iteration r sei (x_r, y_r) der Lösungs-ort, $dist_{i,r}$ die daraus resultierende Entfernung zum Abnehmerort i und $l_{i,r} = (t_i^{l_{i,r-1}}, t_i^{l_{i,r}}]$ das entsprechende Intervall. Im Folgenden werden die drei in Abbildung 7 skizzierten (lokalen) Durchschnittskostenapproximationen unterschieden:

- **Variante 1:** In dieser Variante werden die entfernungsabhängigen Durchschnittskosten zwischen der Entfernung $t = 0$ und der aktuellen Distanz $dist_{i,r}$ gebildet.³ Damit ist der neue Kostensatz der Iteration $r+1$ durch $p_{i,r+1}^{DDK_1} = \frac{c_i(dist_{i,r}) - \Delta f_i^1}{dist_{i,r}}$ bestimmt, was einer Durchschnittskostenapproximation im Intervall $(0, dist_{i,r})$ entspricht. Die Kostenfunktion des Abnehmerortes i der $(r+1)$ -ten Iteration ergibt sich damit zu

$$c_{i,r+1}^{DDK_1}(t) = \Delta f_i^1 + \frac{c_i(dist_{i,r}) - \Delta f_i^1}{dist_{i,r}} t. \quad (12)$$

- **Variante 2:** In der zweiten Variante wird die Gerade zwischen den Punkten $(t_i^{l_{i,r-2}}, f_i^{l_{i,r-1}})$ und $(t_i^{l_{i,r}}, f_i^{l_{i,r}})$ zur Approximation der Kostenfunktion genutzt.
- **Variante 3:** In dieser Variante wird die Gerade zwischen den Punkten $(t_i^{l_{i,r-2}}, f_i^{l_{i,r-1}})$ und $(t_i^{l_{i,r+1}}, f_i^{l_{i,r+1}})$ benutzt.

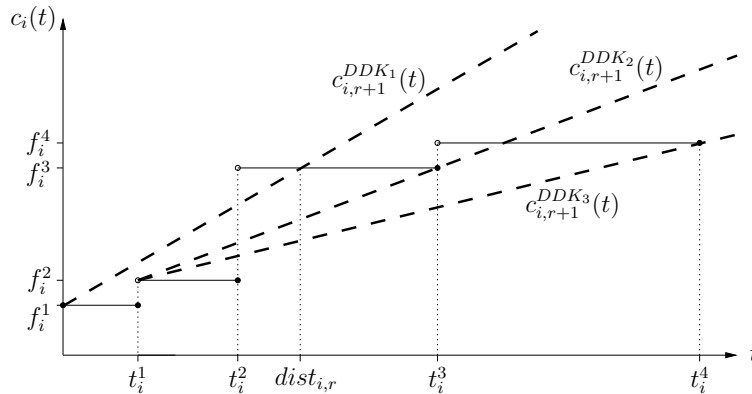


Abbildung 7: Dynamische Durchschnittskostenapproximationen für Treppenfunktionen

Bei allen in diesem Aufsatz vorgestellten Verfahren der dynamischen Linearisierung wird in jeder Iteration ein Steiner-Weber-Problem mit entfernungsunabhängigen Kosten entsprechend Abschnitt 2.3 Fall (i) gelöst. Da bei diesem

³Die Variante 1 ist mit dem von Kim und Pardalos (2000) vorgestellten Dynamic-Slope-Scaling-Verfahren vergleichbar.

Verfahren eine monotone Verringerung des zu minimierenden Zielfunktionswertes nicht in jeder Iteration garantiert ist, wird der jeweils beste Zielfunktionswert gespeichert und das Verfahren beendet, wenn sich nicht innerhalb von 20 Iterationen der bisher beste Zielfunktionswert ändert. So wird z.B. für die dynamische Durchschnittskostenapproximation DDK_1 bereits in der dritten Iteration der Standort $(x^{DDK_1}, y^{DDK_1}) = (68.14, 631.97)$ mit dem Zielfunktionswert $c(x^{DDK_1}, y^{DDK_1}) = 223.6$ erreicht, der in den folgenden 20 Iterationen nicht weiter verbessert wird. Die Varianten 2 und 3 der dynamische Durchschnittskostenapproximation liefern die in Tabelle 1 aufgeführten Standorte mit den Zielfunktionswerten $c(x^{DDK_2}, y^{DDK_2}) = 238.03$ und $c(x^{DDK_3}, y^{DDK_3}) = 242.69$.

Die in diesem Aufsatz vorgestellten dynamischen Durchschnittskostenapproximationen sind für allgemeine stückweise lineare Transportkostenfunktionen anwendbar, insbesondere auch für reine Treppenfunktionen. Werden Transportkostenfunktionen betrachtet, die aus linearen Teilstücken mit einem Anstieg $p_i^l \neq 0$ zusammengesetzt sind, so lässt sich zur Linearisierung auch eine dynamische Grenzkostenapproximation (Tangentenapproximation) durchführen.⁴

Dynamisches Grenzkostenapproximation (DGK)

- (i) *Initialisierung*: Die initialen Transportkostensätze werden wie bei der dynamischen Durchschnittskostenapproximation ermittelt.
- (ii) *Lösung und Aktualisierung der Transportkostensätze*: Bei der dynamischen Grenzkostenapproximation werden in jeder Iteration r die zur aktuellen Entfernung $dist_{i,r}$ gehörenden marginalen Kosten verwendet. Liegt für den Abnehmerort i die Entfernung $dist_{i,r}$ zum optimalen Standort der Iteration r im $l_{i,r}$ -ten Intervall, so wird der Anstieg $p_i^{l_{i,r}}$ für die linearisierte Kostenfunktion gewählt. Die Kostenfunktion für das Steiner-Weber-Problem der Iteration $r + 1$ ist somit durch

$$c_{i,r+1}^{DGK}(t) = f_i^{l_{i,r}} + p_i^{l_{i,r}} t \quad (13)$$

gegeben. Abbildung 8 skizziert die dynamische Grenzkostenapproximation und die Variante 1 der dynamischen Durchschnittskostenapproximation für stückweise lineare Funktionen.

Das Verfahren der dynamischen Grenzkostenapproximation wird ebenfalls beendet, wenn sich der bisher beste Zielfunktionswert nicht innerhalb von 20 Iterationen ändert.

⁴Zur Grenzkostenapproximation von nichtlinearen Produktionskosten vergleiche Schildt (1994).

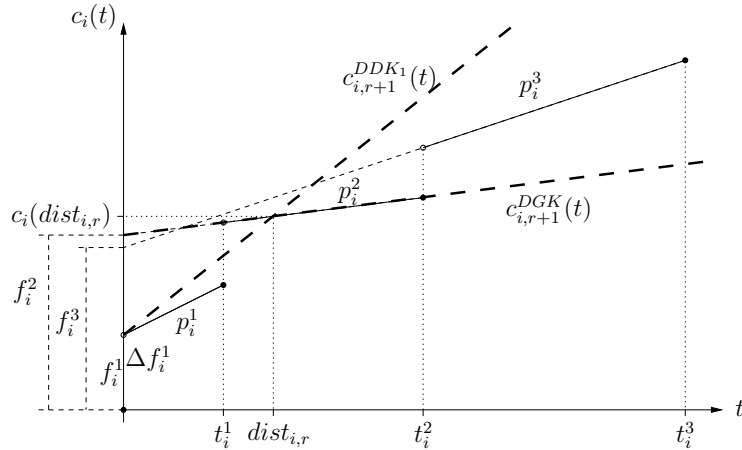


Abbildung 8: Dynamische Grenz- und Durchschnittskostenapproximation für stückweise lineare Kostenfunktionen

3.3 Vergleich mit Regressionsapproximationen der Kostenfunktionen

Die hier vorgestellten Verfahren zur Linearisierung werden in der numerischen Studie mit Ergebnissen verglichen, die sich durch die Optimierung einer Ersatzkostenfunktion ergeben. Dazu werden die Transportkostenfunktionen der Abnehmerorte durch stetige Funktionen approximiert, die durch lineare und geometrische Regression ermittelt werden.

Zur Annäherung der Kostenfunktion eines Abnehmerortes durch eine *lineare Regression* werden T gleichmäßig verteilte Stützstellen zwischen der Entfernung Null und der Maximaldistanz t_{max} gewählt. Im Beispiel liefert die lineare Regressionen bei einer Maximaldistanz von $t_{max} = 989.95$ für die Abnehmerorte $i = 1, \dots, 4$ und $t_{max} = 915.36$ für den Abnehmerort $i = 5$ bei jeweils $T = 100$ Stützstellen mit dem Weiszfeld-Algorithmus den dazu optimalen Standort $(x^{Reg}, y^{Reg}) = (145.99, 502.67)$ mit einem Zielfunktionswert von $c(x^{Reg}, y^{Reg}) = 244.38$.

Tempelmeier (1980) betrachtet eine aus Frachtsatztabellen abgeleitete stetige Kostenfunktion, deren Parameter mittels *geometrischer Regression* bestimmt werden. In Anlehnung an Tempelmeier (1980) werden die hier betrachteten Kostenfunktionen aus der Tabelle 5 im Anhang durch Kostenfunktionen der Form $a_i \cdot dist_i^{b_i}$ angenähert, wobei die Parameter a_i und b_i für jeden Nachfrageort i zu schätzen sind. Das Weiszfeld-Verfahren kann für diese stetigen und differenzierbaren Kostenfunktionen angewandt werden, jedoch besteht die Möglichkeit der Konvergenz in ein lokales Minimum (vergleiche Tempelmeier (1980)). Deswegen wird das Weiszfeld-Verfahren in den hier durchgeführten numerischen Untersuchungen mit je zwei Startlösungen initialisiert. Die erste Startlösung ist durch die Schwerpunktkoordinaten gege-

ben, die sich als Lösung des Standortproblems bei quadrierter euklidischer Entfernungsmessung ergeben (vergleiche Domschke und Drexl (1996)). Als zweite Startlösung wird der Mittelwert der jeweiligen Abnehmerortkoordinaten gewählt. Bei $T = 100$ Stützstellen ergeben sich für das obige Beispiel die Parameter $a_i = 12.9309$ und $b_i = 0.2255$ für die Nachfrageorte $i = 1, \dots, 4$. Auf Grund der unterschiedlichen Maximaldistanzen ergeben sich für den fünften Nachfrageort (1, 591) die Regressionsparameter $a_5 = 14.0771$ und $b_5 = 0.2103$. Das Weiszfeld-Verfahren führt zu der Lösung $(x^{Geo}, y^{Geo}) = (1, 591)$ mit dem Zielfunktionswert $c(x^{Geo}, y^{Geo}) = 242.69$.

Verfahren	$c(x, y)$	(x, y)	Δ^{Grid} [%]
Gitter-Lösung	223.60	(49.00, 616.00)	
DK	244.55	(113.39, 527.84)	9.37
DDK_1	223.60	(68.13, 631.97)	0.00
DDK_2	238.03	(0.00, 700.00)	6.45
DDK_3	242.69	(2.29, 587.86)	8.53
lin. Regr.	244.38	(145.99, 502.67)	9.29
geom. Regr.	242.69	(1.00, 591.00)	8.53

Tabelle 1: Ergebnisse der einzelnen Verfahren für das einführende Beispiel

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse aller vorgestellten Verfahren im Überblick. In diesem Beispiel hat das Verfahren der dynamischen Durchschnittskostenapproximation DDK_1 einen optimalen Standort gefunden. Die Koordinaten dieser Lösung unterscheiden sich von denen der Gitter-Lösung, liegen jedoch innerhalb der gleichen Isokostenfläche, vergleiche Abbildung 5. Die Abweichung des Zielfunktionswertes der anderen Verfahren zu dieser Lösung ist jeweils in der letzten Spalte angegeben und variiert zwischen 6.45% und 9.37%.

4 Numerische Ergebnisse

4.1 Treppenfunktionen bei Teil- und Vollladung

Um die vorgestellten Methoden zur Bestimmung des Standortes auf ihre Güte zu untersuchen, wird eine vorgegebene Anzahl n an Abnehmerorten zufällig in der Ebene platziert. Die x - und y -Koordinaten der Abnehmerorte wurden dazu gleichverteilt im Intervall $(0, 1000)$ generiert. In diesem Abschnitt wird zunächst die bereits in Abschnitt 2.1 erläuterte Treppenfunktion bei Teilladung als Transportkostenfunktion unterstellt. Dazu wird jedem Abnehmerort zufällig eine der 22 Volumenklassen und somit eine der Treppenfunktionen aus Tabelle 5 zugewiesen.

Die Abbildungen 9 und 10 zeigen die Ergebnisse für jeweils 100 Instanzen mit 25, 50, 100 und 200 Nachfrageorten. Für jede Methode ist diejenige Anzahl der Instanzen angegeben, deren Lösung innerhalb eines bestimmten Abweichungsbereichs von der Gitter-Lösung liegt. Dem linken Balkendiagramm der Abbildung 9 ist zum Beispiel für die einstufige Durchschnittskostenapproximation DK bei $n = 25$ Abnehmerorten zu entnehmen, dass von den 100 berechneten Instanzen genau eine mit einer Abweichung kleiner als 1% und 34 mit Abweichungen zwischen 0% und 2% gelöst wurden. In den vier Diagrammen zeigt sich, dass die Verfahren der dynamischen Durchschnittskostenapproximation DDK_1 , DDK_2 und DDK_3 deutlich bessere Standorte ermitteln als die einstufige Durchschnittskostenapproximation DK , die lineare Regression und die geometrische Regression. Dabei führt die geometrische Regression zu geringfügig kleineren durchschnittlichen prozentualen Abweichungen der Zielfunktionswerte zur Gitter-Lösung als die lineare Regression, vergleiche die Zusammenstellung der relativen Abweichungen in Tabelle 2.

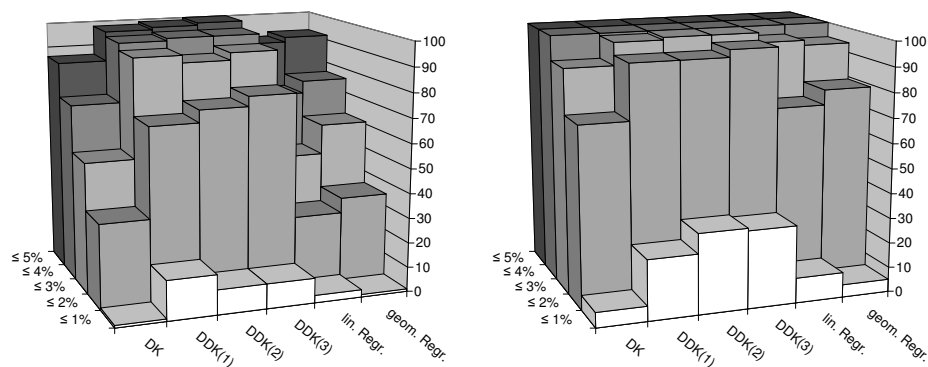


Abbildung 9: Verteilung der relativen Abweichung Δ^{Grid} zur Gitterlösung für $n = 25$ und $n = 50$ Abnehmerorte (Treppenfunktionen, LTL)

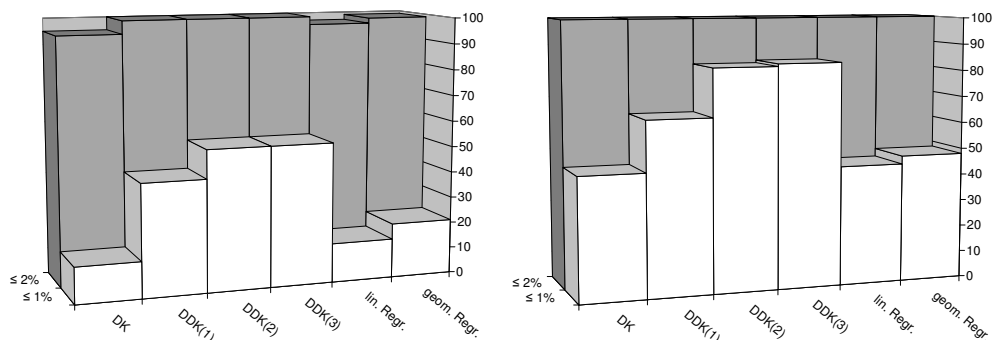


Abbildung 10: Verteilung der relativen Abweichung Δ^{Grid} zur Gitterlösung für $n = 100$ und $n = 200$ Abnehmerorte (Treppenfunktionen, LTL)

Ein weiterer praxisrelevanter Fall betrachtet ausschließlich voll beladene LKWs, die zu den einzelnen Nachfrageorten verkehren. Für diese als Vollladung (FTL: full truck load) bezeichnete Transportart ist somit die Anzahl der Fahrten zu jedem Nachfrageort für die Standortplanung relevant. Dazu wird in den in diesem Abschnitt unterstellten Transportkostenfunktionen ein natürliches Vielfaches der Kostenfunktion eines voll beladenen LKWs angenommen. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen Ergebnisse, in denen die Kostenfunktion eines Standortes dem Produkt der letzten Zeile aus Tabelle 5 mit einer zufälligen ganzen Zahl zwischen 1 und 10 entspricht.⁵ Wie bereits bei den Instanzen mit Teilladungen beobachtet, ermitteln die dynamischen Verfahren bessere Lösungen als die einstufige Durchschnittskostenapproximation und beide Regressionen.

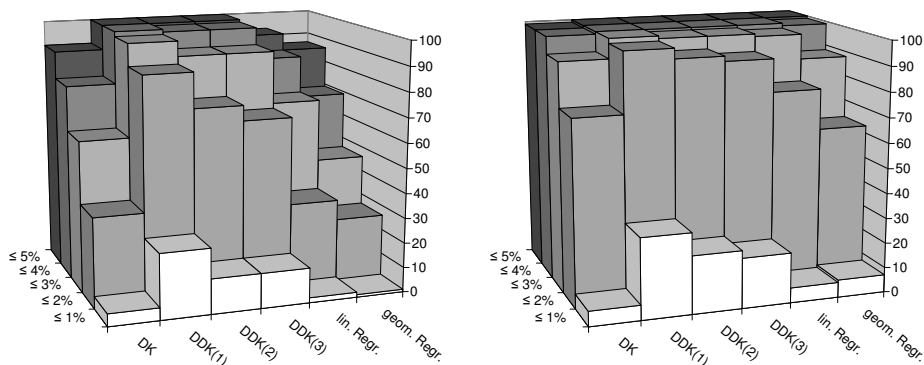


Abbildung 11: Verteilung der relativen Abweichung Δ^{Grid} zur Gitterlösung für $n = 25$ und $n = 50$ Abnehmerorte (Treppenfunktionen, FTL)

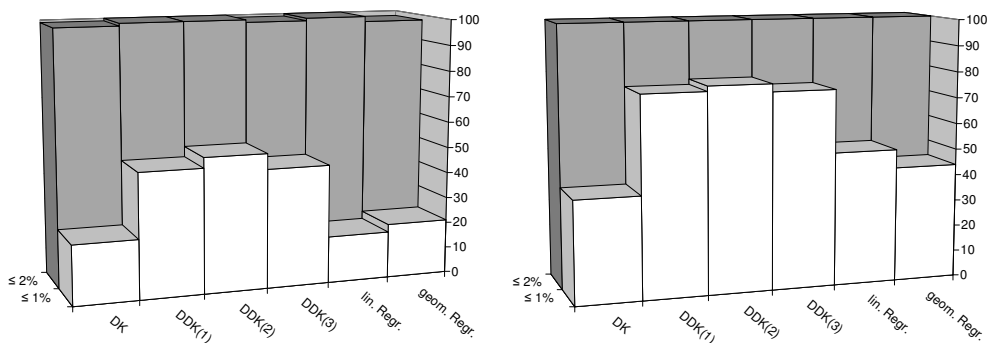


Abbildung 12: Verteilung der relativen Abweichung Δ^{Grid} zur Gitterlösung für $n = 100$ und $n = 200$ Abnehmerorte (Treppenfunktionen, FTL)

⁵Numerische Untersuchungen mit zufällig gewählten Multiplikatoren aus anderen Intervallen, z.B. Multiplikatoren zwischen 1 und 20, führen zu vergleichbaren Ergebnissen.

Die durchschnittlichen Abweichungen Δ^{Grid} der verschiedenen Approximationen zur Gitterlösung in Tabelle 2 zeigen, dass sich die Lösungsgüte der drei betrachteten Varianten der dynamischen Durchschnittskostenapproximationen nur gering unterscheidet. Sowohl für Teil- als auch für Vollladungen verbessern sich die Ergebnisse der Verfahren mit steigender Anzahl n an Abnehmerorten.

Methode	Teilladungen (LTL)				Vollladungen (FTL)			
	25	50	100	200	25	50	100	200
<i>DK</i>	3.98	2.55	1.71	1.05	3.63	2.40	1.59	1.11
<i>DDK</i> ₁	2.26	1.57	1.18	0.79	1.76	1.36	1.09	0.74
<i>DDK</i> ₂	2.27	1.48	1.05	0.65	2.24	1.63	1.09	0.79
<i>DDK</i> ₃	2.23	1.46	1.10	0.68	2.30	1.68	1.15	0.78
lin. Regr.	3.96	2.42	1.74	1.06	3.56	2.24	1.61	1.02
geom. Regr.	3.80	2.39	1.51	1.05	4.19	2.63	1.64	1.06

Tabelle 2: Durchschnittliche Abweichung Δ^{Grid} [%] von der Gitterlösung für verschiedene Anzahlen an Nachfrageorten bei Treppenfunktionen

4.2 Stetige stückweise lineare Kostenfunktionen

Um mit stetigen stückweisen linearen Kostenfunktionen numerische Untersuchungen durchzuführen, werden die Treppenfunktionen aus der Tabelle 5 durch stückweise lineare Funktionen durch die Punkte (t_i^{l-1}, f_i^l) ersetzt. Damit ergibt sich der stetige Polygonzug $(0, f_i^1), (t_i^1, f_i^2), \dots, (t_i^{L-1}, f_i^L), (t_i^L, f_i^L)$.

Methode	Teilladungen (LTL)				Vollladungen (FTL)			
	25	50	100	200	25	50	100	200
<i>DK</i>	0.88	0.36	0.22	0.09	0.27	0.11	0.06	0.03
<i>DDK</i> ₁	0.39	0.21	0.10	0.05	0.06	0.02	0.01	0.00
<i>DDK</i> ₂	0.40	0.21	0.14	0.05	0.14	0.08	0.05	0.02
<i>DDK</i> ₃	0.48	0.23	0.16	0.06	0.13	0.08	0.05	0.02
<i>DGK</i>	0.40	0.21	0.14	0.05	0.14	0.08	0.05	0.02
lin. Regr.	0.76	0.34	0.19	0.02	0.21	0.09	0.05	0.02
geom. Regr.	0.37	0.24	0.12	0.08	0.39	0.20	0.14	0.06

Tabelle 3: Durchschnittliche Abweichung Δ^{Grid} [%] von der Gitterlösung für verschiedene Anzahlen an Nachfrageorten bei stetigen Funktionen

Tabelle 3 zeigt die durchschnittlichen relativen Abweichungen Δ^{Grid} von der Gitterlösung für aus Treppenfunktionen abgeleitete stetige Kostenfunktionen. Die entsprechenden Treppenfunktionen bei Teil- und Vollladungen wur-

den wie in Abschnitt 4.1 beschrieben generiert. Die Ergebnisse der dynamischen Durchschnitts- und Grenzkostenapproximation und der Approximationen der Kostenfunktionen durch geometrische Regression sind bereits bei wenigen Nachfrageorten sehr gut. Die durchschnittlichen Abweichungen Δ^{Grid} betragen im Fall von $n = 25$ Abnehmerorten nur zwischen 0.37% und 0.88% für Instanzen mit Teilladungen (LTL). Bei angenommenen Vollladungen (FTL) fallen die Abweichungen wiederum deutlich geringer aus. In den Beispielen mit vielen Abnehmerorten liefern alle Verfahren hervorragende Ergebnisse. Wie der Tabelle 3 zu entnehmen ist, führt die dynamische Grenzkostenapproximation *DGK* zu vergleichbar guten Ergebnissen wie die dynamischen Durchschnittskostenapproximationen.

4.3 Einfluss der Initiallösung bei der dynamischen Linearisierung

In den vorangegangenen Untersuchungen wurden die dynamischen Verfahren mit Distanzen initialisiert, die sich aus der Lösung der einstufigen Durchschnittskostenapproximation ergeben (*DK*). Für eine Auswahl der untersuchten Instanzen soll im Folgenden gezeigt werden, wie die Güte der Lösung von dieser Initiallösung abhängt. Dazu werden zwei weitere Möglichkeiten der Initialisierung betrachtet. Neben der bereits untersuchten Initiallösung, wird das Ergebnis der geometrischen Regression (*geom. Reg.*) als Startlösung genutzt. Die Distanzen der dritten Initiallösung ergeben sich aus der besten Lösung eines Abnehmerortes als Standort (*Abnehmer*).

Initialisierung	<i>DK</i>	<i>geom. Reg.</i>	<i>Abnehmer</i>
Treppenfunktionen, LTL	1.57	1.46	1.35
Treppenfunktionen, FTL	1.36	1.25	1.24
stetige Funktionen, LTL	0.21	0.13	0.08
stetige Funktionen, FTL	0.02	0.02	0.02

Tabelle 4: Vergleich der mittleren Abweichung $\Delta_{DDK_1}^{Grid}$ [%] unterschiedlicher Initiallösungen der *DDK*₁ für 50 Abnehmerorte

Die Tabelle 4 vergleicht die durchschnittlichen Abweichungen des Beispiels mit 50 Abnehmerorten für das Verfahren der dynamischen Durchschnittskostenapproximation in der Variante 1 (*DDK*₁). Als Kostenfunktionen werden Treppenfunktionen sowie stetige Kostenfunktionen bei bei Teil- und Vollladungen untersucht. Die besten Ergebnisse werden mit Startlösungen erzielt, die den günstigsten Abnehmerort als Standort vorsehen. Im Vergleich zur bisherigen Initialisierung (*DK*) reduziert sich die durchschnittliche Abweichung von 1.57% auf 1.35% für Treppenfunktionen bei Teilladungen, bzw. von 1.36%

auf 1.24% bei Vollladungen. Werden stetige Kostenfunktionen bei Teilladungen unterstellt, so reduziert sich die durchschnittliche Abweichung von 0.21% auf 0.08%. Damit können die bereits sehr guten Ergebnisse der dynamischen Verfahren durch die Wahl einer günstigen Startlösung noch weiter verbessert werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Das Standortplanungsproblem in der Ebene mit stückweise linearen bzw. stückweise konstanten Transportkostenfunktionen lässt sich als gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem formulieren.

Numerische Untersuchungen zeigen, dass eine Annäherung der Kostenfunktion durch eine einstufige Linearisierung zu weitaus schlechteren Lösungen führen kann als die in diesem Aufsatz herausgearbeiteten dynamischen Linearisierungen. In der numerischen Untersuchung erzielen die dynamischen Durchschnitts- und Grenzkostenapproximationen für stückweise konstante Kostenfunktionen deutlich bessere Resultate als die einstufige Durchschnittskostenapproximation und die Approximationen der Kostenfunktionen durch Regressionen. Bei Verwendung von stetigen stückweise linearen Kostenfunktionen erzielen alle untersuchten Verfahren vergleichbar gute Ergebnisse. Die relative Güte der Lösungen verbessert sich mit steigender Abnehmerortzahl n . Die dynamischen Methoden lassen sich noch weiter verbessern, indem als Initiaillösung der beste an einem Abnehmerort liegende Standort gewählt wird.

Auf Grund der leichten Implementierbarkeit und der Lösungsgüte der dynamischen Linearisierungen bietet sich eine Integration in Lösungsverfahren für komplexere Standortplanungsprobleme an. Daher stellt z.B. die Anwendung der hier vorgestellten Ansätze zur simultanen Lokation mehrerer Standorte in der Ebene eine interessante Aufgabe für zukünftige Forschungen dar.

Literatur

- Bloech, Y. (1970). *Optimale Industriestandorte*. Physica-Verlag.
- Cardeneo, A. (2003). Strassengüterverkehr, Speditionen, Logistikdienstleistungen. In: D. Arnold, H. Isermann, A. Kuhn und H. Tempelmeier (Hrsg.), *Handbuch Logistik*. Springer-Verlag. S. C 3-1 – C 3-12.
- Cooper, L. (1968). An extension of the generalized weber problem. *Journal of regional science* 8(2), 181–197.
- Domschke, W. (1997). *Logistik: Rundreisen und Touren*. Oldenbourg Verlag.
- Domschke, W. und A. Drexl (1996). *Logistik: Standorte*. Oldenbourg Verlag.

- Drezner, Z., K. Klamroth, A. Schöbel und G. O. Wesolowsky (2002). The weber problem. In: Z. Drezner und H. W. Hamacher (Hrsg.), *Facility Location. Applications and Theory*. Springer-Verlag.
- Drezner, Z. und A. Suzuki (2004). The big triangle small triangle method for the solution of nonconvex facility location problems. *Operations Research* 52(1), 128–135.
- Eiselt, H. A. (1992). Location modeling in practice. *American Journal of Mathematical and Management Science* 12, 3–18.
- Fleischmann, B. (1993). Designing distribution systems with transport economies of scale. *European Journal of Operational Research* 70, 31–42.
- Hale, T. und C. R. Moberg (2003). Location science research: A review. *Annals of Operations Research* 123, 21–35.
- Hansen, P., D. Peeters, D. Richard und J.-F. Thisse (1985). The minisum and minimax location problems revisited. *Operations Research* 33(6), 1251–1265.
- Holmberg, K. und J. Ling (1997). A lagrangean heuristic for the facility location problem with staircase costs. *European Journal of Operational Research*, 63–74.
- Kim, D. und P. M. Pardalos (2000). Dynamic slope scaling and trust interval techniques for solving concave piecewise linear network flow problems. *Networks* 35(3), 216–222.
- o.V. (2007). *GVE - Güterfernverkehrsente: Unverbindliche Frachtvereinbarungs-Tabellen für den Güterfernverkehr*. Verkehrs-Verlag Fischer.
- Plastria, F. (1993). Continuous location problems anno 1992: A progress report. In: *Studies in Locational Analysis*, Band 5. S. 85–127.
- Schildt, B. (1994). *Strategische Produktions- und Distributionsplanung*. Deutscher Universitäts-Verlag.
- Tempelmeier, H. (1980). Die Bestimmung des optimalen Standorts eines Auslieferungslagers bei entfernungsabhängiger Nachfrage und nichtlinearen Transportkosten. *Zeitschrift für Operations Research* 24, B167–B187.
- Weiszfeld, E. (1937). Sur le point por lequel la somme des distances de n points donnes est minimum. *Tohoku Mathematical Journal*, 355–386.
- Wesolowsky, G. O. (1993). The Weber problem: History and perspectives. *Location Science* 1(1), 5–23.

	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
bis 1.5 m ³	29.53	38.9	46.46	50.37	51.16	51.34	51.51	56.34	61.52	66.58	72.28	76.57	81.78	86.34	91.33
bis 3.0 m ³	46.34	90.91	110.32	121.04	123.46	124.19	124.92	136.64	149.19	161.47	175.29	185.69	198.32	209.38	221.49
bis 4.5 m ³	69.47	135.6	164.18	180.04	183.52	184.46	185.41	202.81	221.44	239.66	260.18	275.6	294.36	310.78	328.75
bis 6.0 m ³	90.64	175.25	211.53	231.4	235.64	236.83	238.02	260.36	284.27	307.89	334.01	353.81	377.89	398.97	422.04
bis 7.5 m ³	108	207.44	249.6	272.57	277.27	278.52	279.76	306.02	334.13	361.62	392.59	415.86	444.16	468.94	496.06
bis 9.0 m ³	125.58	235.48	280.6	304.7	308.89	309.92	310.96	340.14	371.38	401.94	436.36	462.22	493.68	521.22	551.36
bis 10.5 m ³	129.59	246.79	295.98	322.53	327.8	329.14	330.49	361.5	394.71	427.18	463.77	491.26	524.69	553.96	585.99
bis 12.0 m ³	130.93	253.65	306.39	335.27	341.46	343.22	344.98	377.35	412.02	445.92	484.1	512.8	547.7	578.25	611.69
bis 13.5 m ³	131.91	257.64	314.12	345.46	352.9	355.16	357.43	390.96	426.88	462	501.57	531.3	567.45	599.11	633.76
bis 15.0 m ³	140.35	261.18	321.2	354.99	363.71	366.4	369.08	403.72	440.8	477.07	517.92	548.63	585.96	618.65	654.42
bis 18.8 m ³	161.52	283.42	352.93	392.63	403.91	407.45	410.98	449.55	490.85	531.23	576.72	610.92	652.48	688.88	728.72
bis 22.5 m ³	176.35	324.58	404.18	449.66	462.54	466.61	470.69	514.85	562.15	608.4	660.5	699.66	747.27	788.96	834.58
bis 30.0 m ³	176.7	329.02	418.99	481.78	515.93	527.8	539.68	590.32	644.55	697.58	757.32	802.22	856.81	904.6	956.92
bis 37.5 m ³	178.39	329.48	420.7	485.32	521.81	534.6	547.4	598.77	653.77	707.56	768.16	813.69	869.06	917.54	970.6
bis 45.0 m ³	178.67	333.77	435.18	516.71	574.08	594.53	614.98	672.69	734.48	794.91	862.99	914.15	976.35	1030.82	1090.43
bis 52.5 m ³	178.95	337.24	446.98	542.18	587.6	600.13	609.64	732.48	799.77	865.57	939.69	995.4	1063.13	1122.44	1187.35
bis 60.0 m ³	181.56	338.49	459.18	564.8	616.35	639.57	724.47	780.31	853.87	921.87	988.79	1039.21	1130	1192.4	1282.8
bis 67.5 m ³	182.33	339.65	469.92	587.21	651.88	695.7	776.29	849.13	927.14	1003.41	1089.34	1153.92	1232.44	1301.2	1376.44
bis 75.0 m ³	185.42	340.93	482.12	602.25	666.95	746.95	833.47	911.68	995.43	1077.33	1169.58	1238.92	1323.23	1397.04	1477.83
bis 82.5 m ³	185.99	341.99	492.45	607.24	694.1	790.29	881.83	964.58	1053.19	1139.84	1237.45	1310.81	1400	1478.1	1563.58
bis 90.0 m ³	186.97	351.56	495.22	609.73	713.37	801.72	894.59	978.53	1068.42	1156.33	1255.35	1329.78	1420.26	1499.49	1586.2
bis 100.0 m ³	187.74	354.28	504.41	623.41	716.61	810.34	904.2	989.04	1079.9	1168.75	1268.84	1344.06	1435.52	1515.6	1603.24

Tabelle 5: Kostenfunktionen für verschiedene Transportvolumina (LTL)