Die Berechnung von Passport-Optionen mit Finiten Elementen

Jürgen Topper
Discussion Paper No. 224
ISSN 0949-9962

Version 10.4.2000

Jürgen Topper: Arthur Andersen
Financial and Commodity Risk Consulting
Mergenthalerallee 55
65760 Eschborn/Frankfurt
Germany
Juergen.Topper@De.ArthurAndersen.com

Universität Hannover
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Mathematische Wirtschaftstheorie
Königsworther Platz
30167 Hannover
Germany

(Akzeptiert zur Veröffentlichung in: Walter Gruber (Hrsg.): Gesamtbanksteuerung: Integration von Markt- und Kreditrisiken (Stuttgart, 2001, Schäffer-Poeschel Verlag))

Abstrakt

Passport Optionen als Sicherungsinstrument im Handel gewinnen zunehmend an Bedeutung. Ihre Bewertung ist u. a. aufgrund der Nichtlinearität der Bewertungsgleichung schwierig. Mit Finiten Elementen kann man diese Schwierigkeiten überwinden und erhält als Nebenprodukt die *Hedge Ratio*. Außer anhand des einfachen Passport Calls als Benchmark zeigen wir dies anhand einiger Exoten und Modellen mit nicht-konstanter Volatiltität.

Inhaltsverzeichnis

1 Passport Optionen - Funktionsweise und Verbreitung

Seit einigen Jahren gibt es im OTC-Markt ein neues Produkt, daß sich erheblich von anderen Optionen unterscheidet. Hat eine Option als Underlying ein oder mehrere Assets, ist das Underlying der Passport-Option ein Portfolio, das unter aktivem Management steht. Eine einfache europäische Passport-Option gibt dem Besitzer am Ende der Laufzeit das Recht, die Gewinne aus einem Portfolio zu beziehen. So kann sich ein Händler gegen Verluste schützen, indem er eine Passport-Option kauft. Passport-Optionen wurden Anfang 1997 von Bankers Trust zuerst für FX-und Aktien-Portfolios angeboten. Derzeit gibt es sie für eine Vielzahl von Underlyings inkl. Anleihen und Futures. Das Handelsvolumen ist derzeit noch niedrig, aber wachsend, insb. in Deutschland. Viele Finanzinstitutionen haben Interesse gezeigt, dieses Produkt zu verkaufen.

2 Herleitung der Bewertungsgleichung

2.1 Ansätze

Derzeit existieren drei Ansätze zur Bewertung von Passport-Optionen, die sich die jeweiligen Annahmen über die Verzinsung unterscheiden:

- Ahn/Penaud/Wilmott ([1], [2], [31]): Es gibt genau einen Zinssatz, zu dem geliehen und verliehen wird. Eine Verzinsung des Underlyings (z.B. in Form von Dividenden) gibt es nicht.
- Andersen/Andreasen/Brotherton-Ratcliffe [3]: Es gibt genau einen Zinssatz r, zu dem geliehen und verliehen wird. Eine Verzinsung des Underlyings erfolgt stetig mit der Rate γ.
- Hyer/Lipton-Lifschitz/Pugachevsky [15]: Soll- und Habenzinsen sind unterschiedlich. Das Underlying wird nicht verzinst.

Wir wählen den Ansatz von Andersen/Andreasen/Brotherton-Ratcliffe, weil sich dieser vergleichsweise einfach um unterschiedliche Soll- und Habenzinsen erweitern läßt ([3], S. 16). Auch folgen wir der dort eingeführten Notation. Eine Differenzierung von Soll- und Habenzinsen ist aber eher unüblich; auch die Autoren dieses Ansatzes diskutieren den Spezialfall gleicher Soll- und Habenzinsen detaillierter als den allgemeinen Fall ([15], S. 129f). Das Modell von Ahn/Penaud/Wilmott hingegen ist ein Spezialfall von Andersen/Andreasen/Brotherton-Ratcliffe mit $\gamma = 0$.

2.2 Europäische Passport-Kaufoption

Ausgangspunkt ist die Black-Scholes Welt, in der der Underlyings folgender stochastischer Differentialgleichung folgt; vgl. [3]:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \gamma)\, dt + \sigma dW(t) \tag{1}$$

Hält nun ein Investor zum Zeitpunkt t_i Anteile[1] in Höhe von $u(t_i) \in [-1,1]$ an diesem Underlying, ist sein Gewinn bis zum Zeitpunkt t_{i+1}: $u(t_i)\,[S(t_{i+1}) - S(t_i)]$. Über alle Zeitpunkte $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_{H-1}, t_H = T$ aufsummiert, ist sein Gewinn w:

$$w \;=\; \sum_{i=0}^{H-1} u(t_i)\,[S(t_{i-1}) - S(t_i)] \tag{2}$$

Unterstellen wir kontinuierlichen Handel, d.h. $\lim_{i\to 0}(t_i - t_{i+1}) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t u(s)dS(s) &(3)\\ \Longleftrightarrow\; dw(t) &= u(t)dS(t) \;\text{ mit }\; w(0) = 0 &(4) \end{aligned}$$

Die europäische Passport Option erlaubt dem Stillhalter zum Zeitpunkt T, sich w andienen zu lassen. Falls $w < 0$ ist, wird der rationale Investor auf dieses Recht verzichten; andernfalls läßt er liefern. Das Auszahlungsprofil der einfachen europäischen Passport Option ist somit

$$[w(T)]^+ \;\equiv\; \max\,[0, w(T)] \tag{5}$$

Zur Herleitung der Bewertungsgleichung bedienen wir uns desselben Argumentes wie Black und Scholes: Ein Portfolio Π, das momentan risikolos ist, besteht aus einer Passport-Option und $-k$ Einheiten vom Underlying:

$$\Pi = V - kS \tag{6}$$

Im Zeitintervall $(t, t+dt)$ ändert sich der Wert dieses Portfolios um:

$$d\Pi = dV - k(dS + \gamma S dt) \tag{7}$$

Wir unterstellen die Existenz einer optimalen Strategie u^* und die zweifache Differentierbarkeit von V in S und w. Des weiteren unterstellen wir, daß der Käufer der Option sich optimal im Sinne der Gewinnmaximierung verhält, also die Strategie u^* auch fährt (und nicht z.B. von übergeordneten Hedging-Zwängen abgelenkt wird). Dann gilt:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial w}dw + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial w}(dS\;dw) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}(dw)^2 \tag{8}$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, werden zwei weitere Ergebnisse gebraucht. Durch Quadrieren folgt aus Gl. (1):

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt \tag{9}$$

Da der Käufer der Option sich gewinnmaximierend verhält, wird aus Gl. (4):

$$dw = u^* dS \tag{10}$$

[1] Das Intervall $[-1,1]$ ist willkürlich gewählt. Die Intervallgrenzen bedeuten die maximale Position die der Investor im Rahmen des Passport-Kontraktes *short* bzw. *long* gehen kann. In der hier getroffenen Wahl bedeutet 1 also 100 % Ausschöpfung des erlaubten Rahmens.

Einsetzen dieser Ergebnisse in Gl. (8) liefert:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial w}\right) dS + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2u^* \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial w} + \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}\right)\sigma^2 S^2 dt \tag{11}$$

Um das Portfolio Π kurzfristig risikolos zu stellen, die folgende Wahl von k notwendig:

$$k = \frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial w} \tag{12}$$

Aus Gründen der Arbitragefreiheit muß das risikolose Portfolio Π mit derselben Rate wie der marktübliche Zinssatz r wachsen:

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{13}$$

Eine Zusammenfassung der obigen Ergebnissse liefert:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2u^* \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial w} + (u^*)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}\right) + (r-\gamma)S\left(\frac{\partial V}{\partial S} + u^* \frac{\partial V}{\partial w}\right) = rV \tag{14}$$

Mit folgender Endbedingung:

$$V(T, S, w) = w^+ \tag{15}$$

Die Variablensubstitution $x \equiv w/S$, aus der folgt:

$$V(t, S, w) = Sv(t, x) \tag{16}$$

erlaubt die Reduzierung um eine Dimension. So kommen wir auf folgende Bewertungsgleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u^* - x)(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(u^* - x)^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \gamma v \tag{17}$$

mit

$$u^* = \operatorname{sign}\left((r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{18}$$

wobei $v(T)$ in x monoton steigend und konvex[2] in x ist. Äquivalente Formulierungen der PDGL (17) lauten:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - x(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+x^2)\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u^*\left((r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \gamma v \tag{19}$$

und:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - x(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+x^2)\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| = \gamma v \tag{20}$$

mit folgender Endbedingung:

$$v(T, x) = v_T(x) \tag{21}$$

[2] Der Fall nicht-konvexer Payoffs wird in App. B behandelt.

Die Funktion v_T muß konvex in x sein. Diese Differentialgleichung hat für den Spezialfall $r = \gamma$ eine analytische Lösung. Für die allgemeine Differentialgleichung ist keine Lösung bekannt. Deshalb ist eine Approximation gesucht.

Die *Hedge Ratio* k weist einige Unterschiede zum üblichen Black-Scholes Rahmen auf. Deren Überlegung ist, daß ein Portefolio Π, bestehend aus einer *long* Position in einem Call C und einer *short* Position von von k Aktien

$$\Pi = C - kS \tag{22}$$

kurzfristig risikolos ist.[3] Für den Hedge Parameter im Black-Scholes Modell gilt

$$k = \frac{\partial C}{\partial S} = \Delta \tag{23}$$

Auch Portefolios, die Passport Optionen enthalten, können über die Beziehung Gl. (22) gegenüber infinitesimalen Änderungen der Aktie immunisiert werden. Für k gilt dann (vgl. ([3], S. 33f)):

$$k = v + (u^* - x)\frac{\partial v}{\partial x} \tag{24}$$

Die bedeutet, daß die numerischen Schwierigkeiten, die bei der Berechnung von $\frac{\partial C}{\partial S}$ auftreten, auch bei Passport Optionen gelöst werden müssen. Dies ist mit FE vergleichsweise einfach, da die Lösung aus einer polynominalen Approximation des gesamten Definitionsbereichs der PDGL besteht. Für Details siehe [29]. Beachtenswert ist außerdem die Tatsache, daß k als Funktion von x Sprungstellen aufweist, was das tatsächliche Hedging erschwert. Diese Sprünge treten immer dann auf, wenn u^* das Vorzeichen wechselt.

2.3 Frühzeitige Ausübung der Option

Wir integrieren die Möglichkeit der frühzeitigen Ausübung der Option durch eine Straffunktion q. Diese Straffunktion ist so konstruiert, daß sie in Bereichen, in denen die frühzeitige Ausübung sinnvoll ist, den Wert der Bewertungsgleichung auf den inneren Wert der Option zwingt. In restlichen Bereich, in dem frühzeitige Ausübung nicht optiomal ist, verschindet diese Funktion. Für Details dieser Technik und verschiedene Spezifikationen von q siehe [11] and [23].

$$\begin{aligned} \gamma v &= \frac{\partial v}{\partial t} - x(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+x^2)\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| + q \qquad (25) \\ q &= c_{penalty}\left(\min\left[\max\left(S-E,0\right)\right]\right) \qquad (26) \end{aligned}$$

In [11] $c_{penalty}$ hängt ab von Elementtyp und Elementgröße; nach unserer Erfahrung reicht es, $c_{penalty}$ hinreichend groß zu wählen, z. B. $c_{penalty} = 10^8$.

[3] Im Original [5] ist das Portefolio *short* im Call und *long* in der Aktie. Um die Einheitlichkeit zu [3] zu wahren, haben wir die Positionen vertauscht.

3 Finite Elemente als Lösungsverfahren

3.1 Allgemeines

Wir suchen eine numerische Lösung zum Problem bestehend aus den Gleichungen (20) und (21). Obiges Problem ist rückwärts parabolisch. Um in Einklang mit der numerischen Literatur zu stehen, drehen wir die Zeitrichtung um. Zeit t, zu interpretieren als laufende Zeit, wird zur Restlaufzeit $\tau = T - t$, vgl. ([30], p. 45f). Außerdem müssen noch zwei Randbedingungen, die die Variable x nach oben und unten begrenzen, eingefügt werden.[4]

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - x(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+x^2)\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left|(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| = \gamma v \qquad (27)$$

mit folgend Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} c_1 v(x_{min},t) + c_2\frac{\partial v(x_{min},t)}{x} &= v_l & (28)\\ c_3 v(x_{max},t) + c_4\frac{\partial v(x_{max},t)}{x} &= v_r & (29)\\ v(0,x) &= v_0(x) & (30)\end{aligned}$$

Die Funktion v_0 muß natürlich ebenfalls konvex in x sein. Die Gleichung (20) kann umgeschrieben werden als

$$v_\tau = L(v) \qquad (31)$$

mit $L(v)$ als nichtlinearer elliptischer Operator.

In der heutigen Finanzierungsliteratur (z. B. [14], [30]) sind Finite Differenzen (FD) Ansätze beherrschend. Erst in den letzten Jahren sind einige Veröffentlichungen zur Anwendung von Finiten Elementen (FE) erschienen ([10], [11], [12], [16], [17], [27], [29]), obwohl sie schon 1991 zur Lösung von Differentialgleichungen in der Finanzierungstheorie vorgeschlagen worden sind [8]. Die genannten Veröffentlichungen bandelten ausschließlich den Fall *linearer* partieller Differentialgleichung, während wir hier eine *nichtlineare* Differentialgleichung lösen. Etwas vorgreifend ist der grundlegende Unterschied der, daß die Diskretisierung eines linearen Operators $L(u)$ auf ein lineares Gleichungssystem führt, während nichtlineare Operatoren zu nichtlinearen Gleichungssystemen führen.

Die Grundidee, zurückgehend auf den Nobelpreisträger Kantorovitch [19], heutiger zeitabhängiger Finite Elemente Lösungen ist, Zeit und Raum zu trennen ([6], S. 453). Der Raum wird mit Finiten Elementen, die Zeit mit Finiten Differenzen approximiert. Die kann man sich so vorstellen, das der Operatur $L(v)$ schrittweise durch die Zeit wandert. An jedem Schritt wird eine neue FE Lösung für das elliptische Problem gesucht.[5] Im nächsten Unterkapitel wird eine FE Lösung für das elliptische Problem hergeleitet, das dann im wiederum folgenden Unterkapitel durch Hinzunahme der zeitlichen Variable wieder zum ursprünglichen parabolischen Problem wird.

[4] Diese Vorgehensweise ist die übliche, wenn auch nicht die einzig mögliche; für eine Diskussion siehe [21].

[5] Diese Trennung von Raum und Zeit ist allerdings nicht zwingend; siehe z.B. [9]. Nach Kenntnisstand des Autors gibt es keine kommerzielle Software, die diesen Ansätzen folgt.

3.2 Ein Beispiel

3.2.1 Die Black-Scholes-Gleichung

Im folgenden soll an einem einfachen Beispiel die Grundideen Finiter Elemente für parabolische PDGL aufgezeigt werden. Als Beispiel wählen wir Modell von Black and Scholes [5] zur Bewertung von europäischen Kaufoptionen auf Aktien. Zu lösen ist folgende PGDL:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rC - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} \tag{32}$$

$$V(0,t) = 0 \tag{33}$$

$$V(S,t) \sim \text{ mit } S \to \infty \tag{34}$$

$$V(S,T) = \max(S-E,0) \tag{35}$$

Parameter	Wert
Zins r	0,1
Volatilität σ	0,2
Restlaufzeit	0,5 Jahr

Tabelle 1: Daten für Black-Scholes Gleichung

Um die Differentialgleichung eq. (32) auf die einfachere Wärmegleichung zu transformieren, werden folgende Transformationen vorgenommen; vgl. ([30], Kap. 5.4):

$$S = Ee^x \tag{36}$$

$$\tau = \frac{2(T-t)}{\sigma^2} \tag{37}$$

$$V(S,t) = Ee^{\frac{1}{2}(k-1)x - \left(\frac{1}{4}(k-1)^2+k\right)\tau} u(x,\tau) \tag{38}$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{39}$$

Man erhält:

$$u_\tau = u_{xx} \tag{40}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u = 0 \tag{41}$$

$$\lim_{x\to\infty} u = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \tag{42}$$

$$u(x,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \tag{43}$$

Die numerischen Berechnungen können nur auf einer kompakten Teilmenge durchgeführt werden, so daß der obige Definitionsbereich $]-\infty;\infty[$ auf $[x_{min}; x_{max}]$ zu reduzieren ist. Die Werte für x_{min} und x_{max} werden so gewählt, daß die dazugehörigen Werte für S tief im Geld bzw. weit aus dem Geld sind. Wie schon erwähnt, wird die zeitliche Variable von den räumlichen Variablen getrennt. Aus diesem Grunde betrachten wir erst die stationäre Form von Gl. (40):

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 0 && (44)\\ u(x_{min} = -10) &= 0 && (45)\\ u(x_{max} = 1.5) &= 100 && (46) \end{aligned}$$

3.2.2 Stationäre Lösung

Obiges Problem hat die analytischen Lösung, die nach erfolgter Herleitung der numerischen Lösung zur Kontrolle benutzt werden kann:

$$u(x) = \frac{200x + 2000}{23} \tag{47}$$

Es existieren verschiedene FE Ansätze, nach denen die approximative Lösung aufgestellt werden kann. Diese Verfahren werden unterteilt in Ritz-Verfahren und Gewichtete-Residuen-Verfahren. Die Grundidee der Ritzverfahren ist, anstelle der Differentialgleichung das äquivalente Variationsproblem zu lösen. Nun ist nicht zu jeder Differentialgleichung ein äquivalentes Variationsproblem bekannt. In diesem Fall treten Gewichtete-Residuen-Verfahren in Aktion, die unabhängig von der Existenz äquivalenter Variationsprobleme funktionieren. Gewichtete-Residuen-Verfahren gibt es zahlreiche; hier werden wir den Galerkin-Ansatz und den Kollokations-Ansatz beschreiben.

Zunächst leiten wir die Lösung für *ein* Element her. Die unbekannte Funktion u soll durch eine algebraisch einfache Funktion $\tilde{u}$ approximiert werden. Wir wählen ein kubisches Polynom:

$$\tilde{u}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{48}$$

Zu bestimmen sind die Parameter a_i. Ein Teil der a_i kann bestimmt werden, indem man fordert, daß die Randbedingungen exakt eingehalten werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_{min}) &= a_1 + a_2(-10) + a_3(-10)^2 + a_4(-10)^3 \stackrel{!}{=} 0 && (49)\\ \tilde{u}(x_{max}) &= a_1 + a_2(1.5) + a_3(1.5)^2 + a_4(1.5)^3 \stackrel{!}{=} 100 && (50) \end{aligned}$$

Durch die Randbedingungen können so zwei der a_i eleminiert werden. Die Funktion $\tilde{u}$ läßt sich dann darstellen als:

$$\tilde{u}(x) = \underbrace{\frac{200(x+10)}{23}}_{\phi_0} + a_3 \underbrace{\frac{(x+10)(2x-3)}{2}}_{\phi_1} + a_4 \underbrace{\frac{(x+10)(4x^2-40x+51)}{4}}_{\phi_2} \tag{51}$$

Diese Funktion erfüllt für beliebige a_3, a_4 die Randbedingungen. Nun sind a_3, a_4 gesucht, die die Funktion $\tilde{u}$ in einem noch spezifizierenden Sinne „optimale" Approximation für die wahre Funktion u werden lassen. Die Funktion $\tilde{u}$ wird üblicherweise *trial solution* genannt; die Funktionen ϕ_i heißen *trial functions*. Als Residuum R definieren wir die Abweichung, die entsteht, wenn $\tilde{u}$ in die Differentialgleichung (44) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} R(x, a_3, a_4) &= \tilde{u}_{xx}\\ &= 2(3a_4 x + a_3) && (52) \end{aligned}$$

Die Bestimmung der a_i kann auf verschiedene Art geschehen:

- Kollokationsmethode: Zu jedem a_i wird ein Punkt aus der Menge $[x_{min}; x_{max}]$ gewählt. Diese Punkte müssen verschieden sein; dürfen aber beliebige Positionen von $[x_{min}; x_{max}]$ einschließlich des Randes einnehmen. Wir wählen (willkürlich) $x_3 = -8$ und $x_4 = 0$:

$$
\begin{aligned}
R(x_3, a_3, a_4) &= 2(3a_4x + a_3) \stackrel{!}{=} 0 && (53)\\
R(x_4, a_3, a_4) &= 2(3a_4x + a_3) \stackrel{!}{=} 0 && (54)\\
\Rightarrow 0 &= a_3 = a_4 && (55)\\
\Rightarrow \tilde{u}_{Kollokation} &= \frac{200x + 2000}{23} && (56)
\end{aligned}
$$

  Somit gilt sogar $\tilde{u}_{Kollokation} = u$, d. h. die approximative Lösung ist identisch mit der analytischen. Dieses Ergebnis kann immer dann erwartet werden, wenn bei exakter Einhaltung der Randbedingungen die polynomiale Lösung der DGL durch ein Polynom gleichen oder höheren Grades approximiert wird.

- Galerkin-Methode:[6] Für jedes a_i wird erzwungen, daß der gewogene Durchschnitt von R über dem ganzen Definitionbereich $[x_{min}; x_{max}]$ verschwindet. Die Gewichtungsfunktionen sind die *trial functions*:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{min}}^{x_{max}} R\phi_1 dx &\stackrel{!}{=} 0 && (57)\\
\int_{x_{min}}^{x_{max}} R\phi_2 dx &\stackrel{!}{=} 0 && (58)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{12167(4a - 51b)}{-96} = 0 \qquad \frac{12167(85a - 1216b)}{160} = 0 \qquad (59)
$$

  Auch dieses lineare Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung, d.h. $a_3 = a_4 = 0$. Daraus folgt, daß $\tilde{u}_{Galerkin} = u = \tilde{u}_{Kollokation}$. Dieses Ergebnis gilt *nicht* allgemein; gewöhnlich führen unterschiedliche Methoden aus der Familie der gewichteten Residuen zu unterschiedlichen Approximationen.

Normalerweise ist man an einer Lösung interessiert, die aus mehr als einem Element besteht. Zu diesem Zweck unterteilt man das Intervall in (nicht notwendigerweise äquidistante) Intervalle. Es ist empfehlenswert, Gebiete mit starker Krümmung mit kleineren Intervallen zu versehen. In der Optionsbewertung sind dies üblicherweise Gebiete nahe am Ausübungspreis und nahe den Knock-out Barriers. Auch mit mehreren Elementen erhält man ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{q}$. Der Aufbau dieses Gleichungssystem ist eher mühsam, so daß wir den interessierten Leser auf die Lehrbücher [4], [6] oder [24] verweisen.

[6] Dies ist die Methode, die bisher in allen FE Veröffentlichungen zur Finanzierung benutzt worden ist; für einen Überblick siehe [28]. Die Kollokationsmethode (und andere Methoden aus der Familie der Methoden der Gewichteten Residuen) sind bisher noch nicht auf ihre Vor-und Nachteile in der Finanzierung untersucht worden.

3.2.3 Dynamische Lösung

Hängt die Differentialgleichung von zwei Variablen x, y ab, wählt man folgenden Ansatz:

$$\tilde{u}(x, y, a) = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x, y) \tag{60}$$

Ist die zweite Variable hingegen die Zeit t folgt man üblicherweise nicht Gl. (60), sondern wählt:

$$\tilde{u}(x, t, a) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \phi_j(x) \tag{61}$$

d.h. Raum und Zeit werden getrennt. Die Zeit i.d.R. mit Finiten Differenzen approximiert. Man kann es sich so vorstellen, als wandere ein FE-Netz in diskreten Zeitschritten durch die Zeit. Lassen sich lineare *stationäre* Probleme auf das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q} \tag{62}$$

reduzieren, lassen sich lineare *dynamische* Probleme auf ein System linearer Anfangswertprobleme bringen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\,\dot{\boldsymbol{u}} && (63) \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_\circ && (64) \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen des linearen Anfangswertproblems ist die diskretisierte Anfangsbedingung (43). Analytische und numerische Methoden für Probleme dieser Art (inkl. nicht-linearer Anfangswertprobleme) sind in den Wirtschaftswissenschaften seit langem Standard ([7], [18])

3.3 Finite Element Lösung der Bewertungsgleichung

Analog zu obigen Ausführungen kann eine FE Lösung für allgemeinere parabolische PDGLs entwickelt werden, so daß die Black-Scholes Gleichung auch ohne Transformation approximiert werden kann. Die Bewertungsgleichung für Passport Optionen hingegen ist nichtlinear. Dies führt in der FE Diskretisierung zu einem System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen [32].

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= f(u_1, \ldots, u_n, t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n &= f(u_1, \ldots, u_n, t) \end{aligned} \tag{65}$$

Für diesen Artikel haben wir das kommerzielle Software-Paket *PDE*ase*2D*^{TM} [20] verwendet. Es handelt sich hierbei um ein Ergänzungspaket zum klassischen Computer-Algebra-Paket *MACSYMA*^{TM}. Ein Teil der Rechnungen wurde mit dem ebenfalls kommerziellen Paket PDE2D [25] überprüft.[7]

[7] Sämtliche Routinen, die zur Erstellung dieses Papers notwendig waren, können vom Autor bezogen werden. Eine Demo-Versionen der genannten Pakete sind ebenfalls verfügbar.

4 Anwendungen

4.1 Einfache Kaufoption

4.1.1 Spezialfall: Bekannte analytische Lösung

Das Beispiel von Andersen, Andreasen und Brotherton-Ratcliffe Für den Spezialfall $r = \gamma$ reduziert sich Gleichung (20) zu

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}(1+|x|)^2\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \gamma v \tag{66}$$

Für den Payoff $v(T) = \max(0, X) \equiv X^+$ bieten [3] folgende analytische Lösung zu Gleichung (66) an:

$$v(t,x) = e^{-\gamma(T-t)}\left[x^+ + N(d) - (1+|x|)\,N\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right) + \Omega\right] \tag{67}$$

mit

$$d = \frac{-\ln(1+|x|) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{1}{2}\left[d\sigma\sqrt{T-t} - 1\right]N(d) \\ & + \frac{1}{2}(1+|x|)\,N\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ & + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}N'(d)\end{aligned} \tag{69}$$

N und N' stellen Verteilungs- und Dichtefunktion der Standardnormalverteilung dar. Diese analytische Lösung soll hier als Benchmark genutzt werden. Da die partielle Differentialgleichung (66) linear ist, erlaubt uns dies, die analytische Lösung einer linearen und einer nichtlinearen FE-Lösung gegenüberzustellen.

Wir wiederholen das Beispiel aus ([3], Table 1). Unsere Ergebnisse stimmen mit den dort zitierten nicht überein, weil die zitierten z. T. fehlerhaft sind.[8] Die Ergebnisse der Berechnung von Ausdruck (67) sind sensibel bezüglich der Approximation der Normalverteilung. Wir zeigen die Ergebnisse mit jeweils einer Approximation der Normalverteilung, die auf vier und sieben Stellen genau ist; vergleiche z. B. ([14], S. 243f). Letztere wird im weiteren als Benchmark verwendet. Für die Angabe der prozentualen Abweichungen werden mehr Nachkommastellen verwendet als hier wiedergegeben. Der *root mean sqare error* wird vom Programmbenutzer eingestellt. Abweichung ist wie folgt definiert:

$$Abweichung = \frac{Ergebnis - Ergebnis_{FE}}{Ergebnis} \tag{70}$$

[8] Andersen et al. vergleichen ein Crank-Nicholson FD Schema mit ihrer analytischen Lösung in ([3], Tab. 3). Nur scheinbar konvergiert der numerische Ansatz nicht gegen die analytische Lösung, insb. für hohe w. In Wirklichkeit jedoch konvergiert das numerische Verfahren, aber nicht gegen die *falsche* analytische Lösung.

Parameter	Wert
Aktie S	100
Dividendenrate γ	0
Zins r	0
Volatilität σ	0,3
Restlaufzeit	1 Jahr

Tabelle 2: Daten des Beispiels von Andersen et al., Tab. 1

w	Ergebnis aus [3]	Korrekte Lösung: $N(\cdot)$ genau auf ...	
		... 4 Stellen	... 7 Stellen
100	100,1566	100,15580	100,15660
50	51,6456	51,58188	51,58181
20	25,9063	25,88776	25,88757
10	18,8846	18,87984	18,88084
0	13,1381	13,13906	13,13810
-10	8,8808	8,87984	8,88084
-20	5,8876	5,88776	5,88757
-50	1,5893	1,58188	1,58181
-100	0,1566	0,15576	0,15660

Tabelle 3: Benchmark $\gamma = r = 0$

Zur numerischen Lösung der Differentialgleichung (66) sind außer der Endbedingung, die durch das Auszahlungsprofil gegeben ist, zwei zusätzliche Randbedingungen notwendig, die den Definitionsbereich der PDGL $-\infty \ < x \ \infty$ abschneidet. Die Autoren schlagen vor ([3], S. 23f)

$$v(t, -e^{h\sigma\sqrt{T-t}}) = 0 \tag{71}$$

$$\frac{\partial v(t, e^{h\sigma\sqrt{T-t}})}{\partial x} = e^{-r(T-t)} \tag{72}$$

$$h = 4 \tag{73}$$

Dieses Problem lösen wir zuerst mit einem *nicht-linearen* FE-Ansatz wie in Kap. 3 beschrieben als auch mit einem *linearen* FE-Ansatz (vgl. [29]). Jede dieser Berechnung wird mit drei unterschiedlichen Genauigkeitseinstellungen durchgeführt. Die Ergebnisse von linearem und nicht-linearen FE-Ansatz sind fast identisch, was daraufhindeutet, daß der Algorithmus, der das nicht-lineare Gleichungssystem lösen soll, auch bei linearen Gleichungssystemen funktioniert.

w	Ana-lytische Lösung	Numerische Lsg.: `errlim =`					
		`1,0E-5`		`1,0E-6`		`1,0E-7`	
		linear	nicht-linear	linear	nicht-linear	linear	nicht-linear
100	100,15660	100,1556	100,1556	100,1568	100,1568	100,1566	100,1566
50	51,58181	51,5817	51,5817	51,5817	51,5817	51,5815	51,5815
20	25,88757	25,8870	25,8870	25,8863	25,8863	25,8874	25,8874
10	18,88084	18,8787	18,8787	18,8794	18,8794	18,8807	18,8807
0	13,13810	13,1391	13,1391	13,1391	13,1391	13,1391	13,1391
-10	8,88084	8,8787	8,8787	8,8793	8,8793	8,8807	8,8807
-20	5,88757	5,8870	5,8870	5,8863	5,8863	5,8874	5,8874
-50	1,58181	1,5817	1,5817	1,5808	1,5808	1,5815	1,5814
-100	0,15660	0,1556	0,1556	0,1568	0,1568	0,1566	0,1567

Tabelle 4: Nicht-lineare und Lineare FEM für Benchmark: Ergebnisse

w	Numerische Lsg.: `errlim =`					
	`1,0E-5`		`1,0E-6`		`1,0E-7`	
	linear	nicht-linear	linear	nicht-linear	linear	nicht-linear
100	0,0010%	0,0010%	-0,0002%	-0,0002%	0,0000%	0,0000%
50	0,0002%	0,0002%	0,0002%	0,0002%	0,0006%	0,0006%
20	0,0022%	0,0022%	0,0049%	0,0049%	0,0007%	0,0007%
10	0,0113%	0,0113%	0,0076%	0,0076%	0,0007%	0,0007%
0	-0,0076%	-0,0076%	-0,0076%	-0,0076%	-0,0076%	-0,0076%
-10	0,0241%	0,0241%	0,0173%	0,0173%	0,0016%	0,0016%
-20	0,0097%	0,0097%	0,0216%	0,0216%	0,0029%	0,0029%
-50	0,0070%	0,0070%	0,0639%	0,0639%	0,0196%	0,0259%
-100	0,6386%	0,6386%	-0,1277%	-0,1277%	0,0000%	-0,0639%

Tabelle 5: Nicht-lineare und Lineare FEM für Benchmark: Abweichungen

Im folgenden rechnen wir mit der Einstellung `errlim=0.000001`. Zur Tabelle (6) berechnen wir folgende *Hedge Ratios*. Die *Hedge Ratios* wird berechnet über Gl. (24). Die dazu notwendige Ableitung $\frac{\partial v}{\partial x}$ kann *analytisch* aus der numerischen Approximation von v gewonnen werden.

w	Hedge Ratio k
100	-0,9838
50	-0,8775
20	-0,6449
10	-0,5189
0	0,5004
-10	0,4812
-20	0,3551
-50	0,1225
-100	0,0163

Tabelle 6: Die *Hedge Ratio* k des Benchmarks

Das Beispiel Ahn, Penaud und Wilmott Der Spezialfall $\gamma = 0$ ist der Rahmen, in Ahn et al. ihr Modell entwickeln ([1], [2]). Auch sie liefern ein Beispiel ([2], S. 10), das hier ebenfalls als Benchmark benutzt werden soll. Dieses Beispiel veranschaulicht, wie das Modell von Ahn et al. im Rahmen des allgemeineren Modells von Andersen et al. einzuordnen ist. Ahn et al. lösen ihr Problem mit dem expliziten Finite Differenzen Schema aus [30].

Parameter	Wert
Aktie S	100
Dividendenrate γ	0
Volatilität σ	0,2
Restlaufzeit	0,5 Jahre

Tabelle 7: Daten des Beispiels von Ahn et al.

w	Analytische Lsg.	Expl. FD	Abweichung
0	5,89660	5,8931	0,05936%
w	Analytische Lsg.	FEM	Abweichung
0	5,89660	5,89757	0,01643%

Tabelle 8: Die Optionsprämie des Beispiels aus Ahn et al.

4.1.2 Allgemeiner Fall

Auch für den Fall $\gamma \neq r$, für den keine geschlossene Lösungsformel bekannt ist, berechnen Andersen et al. ein Beispiel mittels eines Crank-Nicholson FD Schematas ([3], S. 26). Sie benutzen 100 äquidistante Schritte in der Zeit und 800 ebenfalls äquidistante Schritte in der Raumvariable. Ihr Beispiel hat die folgenden Daten:

Parameter	Wert
Aktie S	100
Dividendenrate γ	5 %
Zins r	4,5 %
Volatilität σ	0,3
Restlaufzeit	2 Jahre

Tabelle 9: Daten des Beispiels von Andersen et al., Tab. 4

Wir stellen diese FD Ergebnisse unseren mittels der FEM erzielten Resultate gegenüber.

w	FD	FE	Abweichung	Hedge Ratio k
20	28,2277	28,2249	0,0000010%	-0,4674
10	22,3741	22,3734	0,0000003%	-0,3724
0	17,4323	17,4423	-0,0000057%	-0,2674
-10	13,5100	13,5113	-0,0000010%	0.5180
-20	10,4261	10,4293	-0,0000031%	0,4302

Tabelle 10: Nicht-lineare FDM und FEM

4.1.3 Nichtkonstante Volatilität

Hier erweitern wir das Ausgangsmodell der Europäischen Passport Option um ein einfaches Volatilitätsmodell. Die Daten des Beispiels stammen wiederum aus Tabelle (9). Wir unterstellen linear fallende Volatilität von 30 % auf 10 % in Tabelle (11) und linear steigende Volatilität von 20 % auf 40 % in Tabelle (12).

w	Prämie	Hedge Ratio k
20	22,92945	-0,58095
10	16,72279	-0,45126
0	11,73692	-0.31744
-10	7,98969	0,42873
-20	5,31088	0,31973

Tabelle 11: Fallende Volatilität

w	Prämie	Hedge Ratio k
20	28,63056	-0,46479
10	22,76108	-0,37240
0	17,79276	-0,26782
-10	13,82655	0,52379
-20	10,71511	0,43617

Tabelle 12: Steigende Volatilität

Für die Erweiterung dieses Modells um stochastische Volatilität siehe [13].

4.2 Kaufoption mit Selbstbeteiligung

In den obigen Berechnungen bekommt ein erfolgloser Händler Verluste erstattet. Hier führen wir eine Selbstbeteiligung des Händlers ein, so daß seine Verluste erst ab einem Schwellenwert K erstattet werden. Die Daten des Beispiels stammen aus Tabelle (9); als Schwellenwert setzen wir $K = 10$. Dadurch ändert sich die Endbedingung zu

$$v(T) = \max\left(0, x - \frac{K}{S}\right) \tag{74}$$

Als Bewertungsgleichung dient wiederum die PDGL (20)[9] und als Randbedingungen die Gleichungen (71) und (72) mit $k = 6$.

w	Prämie	Hedge Ratio k
20	22,85350	-0,44673
10	17,63497	-0,34936
0	13,34422	-0,24499
-10	10,03164	0,41743
-20	7,51942	0,33651

Tabelle 13: Call mit Selbstbeteiligung

4.3 Kaufoption mit Cap

Eine Möglichkeit, die Gewinn-Möglichkeiten des Käufers der Passport-Option zu begrenzen, ist die Einführung eines Caps auf x. Da gilt $x = w/S$, ist die Höhe des Caps um den Preis der Aktie normiert. Nur ein überproportionales Ansteigen von w kann dazu führen, daß der Cap greift. Verluste in w sind durch diese Option immer noch vollständig gedeckt. Im Beispiel liegt der Cap bei $x = 2$. Die anderen Daten stammen aus Tab. (9).

w	Prämie	Hedge Ratio k
20	25,2556	-0,4337
10	20,0280	-0,3206
0	15,7438	-0,2271
-10	12,2934	0.4608
-20	9,5537	0,3863

Tabelle 14: Europäische Passport-Option mit Cap

4.4 Kaufoption mit Down-and-out Barrier

Eine Möglichkeit, die Verlustmöglichkeit des Stillhalters zu begrenzen, ist die Einführung eines Down-and-out Barrier. Sobald x diese Barrier berührt, verfällt der Kontrakt. Die anderen Daten sind Tab. (9) entnommen.

w	Prämie	Hedge Ratio k
20	25,2559	-0,4337
10	20,0288	-0,3209
0	15,7400	-0,2276
-10	12,2922	0.4608
-20	9,5513	0,3869

Tabelle 15: Europäische Passport-Option mit Donw-and-out Barrier

[9]Es ist ebenfalls möglich, PDGL (19) als Bewertungsgleichung heranzuziehen. Unterschiede in den Ergebnissen sind nur in der vierten Nachkommastelle aufgetreten.

4.5 Frühzeitige Ausübung

Hier wird das Beispiel Tab. (9) um die Möglichkeit der frühzeitigen Ausübung erweitert. Für amerikanische Passport Optionen lösen wir Gl. (25). Die Zeit-Diskretisierung erfolgt über ein adaptives Crank-Nicholson Verfahren mit sehr kleiner Anfangsschrittweite ($\Delta t = 10^{-20}$).

w	FD [3]	FE	Abweichung	Hedge Ratio
20	29,1764	29,2110	-0,1186%	-0,5042
10	23,0050	23,0272	-0,0965%	-0,3974
0	17,8418	17,8648	-0,1289%	0,6384
-10	13,7776	13,7873	-0,0704%	0.5330
-20	10,6031	10,6124	-0,0877%	0,4406

Tabelle 16: Amerikanische Passport-Option

Die FD Ergebnisse von [3] sind vermutlich ungenau aufgrund konstanter Schrittweitenlänge für die Zeit. Ergänzende Berechnungen mit einer Kollokations-Methode [25] haben unsere Ergebnisse, die auf der Galerkin-Methode beruhen, bestätigt. Ein weiterer Grund für die Ungenauigkeit der mit FD erzielten Ergebnisse kann in der Integrierung frühzeitiger Ausübung liegen. In jedem Zeitschritt j und an jedem Knoten i des FD-Gitters testet der von [3] angepaßte Crank-Nicholson Algorithmus mittels folgender Beziehung auf Optimalität frühzeitiger Ausübung:

$$v_{i,j} = \max(\hat{v}_{i,j}, x_i^+) \tag{75}$$

Die Größe $\hat{v}_{i,j}$ ist das Ergebnis des Crank-Nicholson Schemas ohne Erweiterung auf frühzeitige Ausübung. Auch wenn diese Technik der Integrierung frühzeitiger Ausübung für explizite FD Schemata geeignet ist, ist sie bei Crank-Nicholson Verfahren nur von der Genaugikeit $O(\delta t)$. Für ein Verfahren mit der Genaugikeit $O(\delta t^2)$ siehe ([31], p. 654f).

A Konvexe und konkave Funktionen

Der Begriff der Konvexität als Eigenschaft von Funktionen spielt in der Ökonomie eine große Rolle ([7],[26]). In diesem Zusammenhang brauchen wir nur die Konvexität für univariate Funktionen, die auf den gesamten Zahlenstrahl definiert sind. Für diese Funktionen ist das Konzept der Konvextität am einfachsten. Wir starten mit einigen Definitionen:

- Eine Funktion heißt *streng konvex*, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte M und N der Funktion vollständig oberhalb der Funktion liegt außer an den Punkten M und N selber.

- Eine Funktion heißt *konvex*, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte M und N der Funktion oberhalb oder auf der Funktion liegt.

Analog lassen sich konkave Funktionen definieren:

- Eine Funktion heißt *streng konkav*, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte M und N der Funktion vollständig unterhalb der Funktion liegt außer an den Punkten M und N selber.

- Eine Funktion heißt *konkav*, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte M und N der Funktion unterhalb oder auf der Funktion liegt.

Aus den Definitionen lassen sich einige Eigenschaften von konvexen Funktionen direkt ableiten:

- Konvexe Funktionen sind stetig. Ebenfalls sind konkave Funktionen stetig.

- Eine Funktion, die sowohl konkav als auch konvex ist, ist linear.

- Eine Funktion kann nicht streng konvex und streng konkav gleichzeitig sein.

- Eine Funktion mit linearen Teilstücken kann weder streng konvex noch streng konkav sein.

- Eine Funktion, die nicht konvex ist, ist nicht notwendigerweise konkav.

- Falls eine Funktion f konvex ist, ist $-f$ konkav.

Obige Definition der Konvexität läßt sich auch algebraisch definieren:

- Eine Funktion f heißt *konvex*, genau dann wenn für jedes beliebige Paar verschiedener Punkte M und N gilt:

$$\theta f(M) + (1-\theta)f(N) \leq f[\theta M + (1-\theta)N] \tag{76}$$
$$0 < \theta < 1 \tag{77}$$

Für streng konvexe Funktionen muß das „$\leq$ “ durch ein „$<$ “ ersetzt werden. Die Definitionen für konkave Funktionen sind entsprechend. Der Nachweis der Konvexität über die Definition ist oft schwer zu führen. Aus diesem Grunde sind eine Vielzahl von Kriterien zum Überprüfen der Konvexität entwickelt worden. Die wichtigsten seien nachstehend genannt.

Funktion f	Bedingung	Kriterium
konvex	$f'' > 0$	notwendig und hinreichend
streng konvex	$f'' > 0$	notwendig
konkav	$f'' < 0$	notwendig und hinreichend
streng konkav	$f'' < 0$	notwendig

Tabelle 17: Testkriterien für konvexe Funktionen

B Endbedingung für Passport Optionen

B.1 Eine Korrektur

Laut ([3], Proposition 5) gilt für allgemeine Auszahlungsprofile ebenfalls PDGL (17), allerdings modifiziert um folgende Steuerung $u^* \in [-1,1]$:

$$u^* = \begin{cases} \psi & falls\ \psi(x,t) \in [-1,1] \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0 \\ \text{sign}(\psi(x,t)) & sonst \end{cases} \tag{78}$$

mit

$$\psi(x,t) = x - \frac{r-\gamma}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \tag{79}$$

Wir zeigen im folgenden durch ein Gegenbeispiel, daß diese Behauptung falsch ist. Der Spezialfall des konvexen Auszahlungsprofils müßte im allgemeinen Auszahlungsprofil enthalten sein. Dies ist aber nicht der Fall. In unserem Gegenbeispiel betrachten wir nur den Fall $r = \gamma$, aber das Gegenbeispiel läßt sich einfach auch für $r \neq \gamma$ erweitern. Die einzige optimale Steuerung u^* für konvexe Auszahlungsprofile ist laut Gl. (18) (vgl. auch [3], Proposition 2)

$$u^*(x,t) = \text{sign}\left((r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} - x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{80}$$

Einsetzen von $r = \gamma$ vereinfacht obigen Ausdruck zu

$$u^*(x,t) = \text{sign}\left(-x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{81}$$

Nun gilt laut Modellannahme $\sigma^2 > 0$, da $\sigma^2 = 0$ dem Modell die Grundlage entziehen würde, da in einer deterministischen Welt kein Markt für Passport Optionen existieren könnte. Außerdem folgt aus der Konvexität von v in x, daß gilt $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0$. Außerhalb des Zeitpunktes der Auszahlung gilt sogar strenge Konvexität $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} > 0$. Zusammenfassend gilt also im halboffenen Intervall $t \in [0, T[$

$$\text{sign}\left(-x\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \text{sign}\left(-x\right) \tag{82}$$

Im allgemeinen Fall wird die optimale Steuerung gegeben durch Gleichung (78) bei Einsetzen eines konvexen Auszahlungsprofils und $r = \gamma$ zu

$$u^* = \text{sign}(\psi) = \text{sign}(x) \tag{83}$$

Gleichung (82), die die allgemeine Lösung darstellt, steht im Widerspruch zu Gleichung (83), die den konvexen Spezialfall repräsentiert. Damit ist ([3], Proposition 5) widerlegt.

B.2 Allgemeine Endbedingung

In diesem Abschnitt[10] stellen wir die allgemeine Steuerung für beliebige Endbedingungen vor. Weiter leiten wir daraus die Spezialfälle für konvexe und konkave

[10] Für die Ergebnisse dieses Kapitel bedanke ich mich bei Leif Andersen.

Endbedingungen ab.

Die allgemeine Steuerungsfunktion lautet:

$$u^* = \begin{cases} \psi & falls\ \psi(x,t) \in [-1,1] \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0 \\ \mathrm{sign}(\,-\psi\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) & sonst \end{cases} \tag{84}$$

Hieraus lassen sich die beiden Spezialfälle für konvexe und konkave Auszahlungsfunktionen herleiten. Für streng konkave Endbedingungen ($\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0$) vereinfacht sich Gleichung (84) zu:

$$u^* = \begin{cases} \psi & falls\ \psi(x,t) \in [-1,1] \\ \mathrm{sign}(\psi) & sonst \end{cases} \tag{85}$$

Für (streng und einfach) konvexe Auszahlungsprofile gilt:

$$\begin{aligned} u^* &= \mathrm{sign}\left(-\psi\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) && (86)\\ &= \mathrm{sign}\left(\left[x - \frac{r-\gamma}{\sigma^2}\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) && (87)\\ &= \mathrm{sign}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left[(r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma^2 x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right) && (88)\\ &= \mathrm{sign}\left((r-\gamma)\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma^2 x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) && (89) \end{aligned}$$

da $\sigma^2 \geq 0$. Dies ist die in ([3], Gl. (18)) angegebene Steuerungsfunktion für konvexe Auszahlungsprofile. Eine scheinbare Einschränkung ist, daß z. B. die Auszahlungsfunktion $\max(0,x)$ (die zum Zeitpunkt T gilt) an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist. Nun ist die Steuerungsfunktion u^* nur gültig in $]T,0]$.

Literatur

[1] Ahn, H., Penaud, A., Wilmott, P.: *Various Passport Options and Their Valution.* Preprint OCIAM Oxford University, 1998.

[2] Ahn, H., Penaud, A., Wilmott, P.: *Exotic Passport Options.* Preprint OCIAM Oxford University, 1998.

[3] Andersen, L., Andreasen, J., Brotherton-Ratcliffe, R.: *The Passport Option.* Journal of Computational Finance. 1/3 (1998) 15-36.

[4] Bickford, W. B.: *A First Course in the Finite Element Method.* Boston, 1990.

[5] Black, F., Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, 81 (1973) 637-659.

[6] Burnett, D. S.: *Finite Element Analysis - From Concepts to Applications.* Reading (US) etc., 1987.

[7] Chiang, A. C.: *Fundamental Methods of Mathematical Economics* 3. Aufl. New York etc., 1984.

[8] Duffie, D.: *The Theory of Value in Security Markets* in: Hildenbrand, W., Sonnenschein, H.: *Handbook of Mathematical Economics Vol. IV.* North-Holland etc., 1991.

[9] Eriksson K., Estep, D., Hansbo, P., Johnson C: *Computational Differential Equations.* Lund (Sweden), 1996.

[10] Forsyth, P. A., Vetzal, K. R., Zvan, R.: *A Finite Element Approach to the Pricing of Discrete Lookbacks with Stochastic Volatility.* Preprint University of Waterloo, Department of Computer Science. Version July 11, 1997.

[11] Forsyth, P. A., Vetzal, K. R., Zvan, R.: *Penalty Methods for American Options with Stochastic Volatility.* Preprint University of Waterloo, Department of Computer Science. Version September 30, 1997.

[12] Forsyth, P. A., Vetzal, K. R., Zvan, R.: *A General Finite Element Approach for PDE Option Pricing Models.* Preprint University of Waterloo. Version December 1998.

[13] Henderson, V., Hobson, D.: *Passport Options with Stochastic Volatility.* Research Report, RiskLab, ETH Zürich. Version March 31, 2000.

[14] Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 3. ed.. London etc., 1997.

[15] Hyer, T., Lipton-Lifschitz, A., Pugachevsky, D.: *Passport to Succes.* Risk Magazine. 10/9 (1997) 127-131.

[16] Jackson, N., Süli, E.: *Adaptive Finite Element Solution of 1D European Option Pricing Problems.* Oxford University Computing Laboratory. Report 97/05.

[17] Jackson, N., Süli, E., Howison, S.: *Computation of Deterministic Volatility Surfaces.* Oxford University Computing Laboratory. Report 98/01.

[18] Judd, K. L.: *Numerical Methods in Economics.* Cambrigde (Massachusetts), 1998.

[19] Kantorovitch, L. V., Krylov, V. I.: *Approximate Methods for Higher Analysis.* New York, 1964.

[20] Macsyma Inc. (ed.): *PDE*ase*2D*^{TM} *Reference Manual*, 3. ed.. Arlington (USA), 1996.

[21] McIver, J. L. *Overview of Modeling Techniques* in: [22].

[22] Nelken, I. (Hrsg.): *The Handbook of Exotic Options.* Chicago, 1996.

[23] Nielsen, B. F., Skavhaug, O., Tveito, A.: *Penalty and Front-fixing Methods for the Numerical Solution of American Option Problems.* Working Paper Dep. of Informatics, University of Oslo. Version 31.1.2000.

[24] Richter, W.: *Partielle Differentialgleichungen.* Heidelberg etc., 1995.

[25] Sewell, G.: *Analysis of a Finite Element Method: PDE/PROTRAN.* Berlin etc., 1985.

[26] Takayama, A.: *Mathematical Economics*, 2. ed.. Cambrigde (UK), 1985.

[27] Topper, J.: *Solving Term Structure Models with Finite Elements.* Marburg, 1998.

[28] Topper, J.: *Finite Element Modeling of Exotic Options.* Vortrag beim *SIAM Annual Meeting* (Atlanta, 13. Mai 1999). [Erhältlich vom Autor]

[29] Topper, J.: *Finite Element Modeling of Exotic Options.* Journal of the Mongolian Mathematical Society. 4/2000.

[30] Wilmott, P., Dewynne, J., Howison, S.: *Option Pricing - Mathematical Models and Computation.* Oxford, 1996.

[31] Wilmott, P.: *Derivatives.* Chichester etc., 1998.

[32] White, R. E.: *An Introduction to the Finite Element Method with Applications to Nonlinear Problems.* New York etc., 1985.